

# Tentamen

## Inleiding Numerieke Wiskunde Bachelor wiskunde jaar 1

Hertentamen

Datum: 11 juli 2017

Tijd: 09.00-12.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 5

Maximum aantal te behalen punten: 20 waarvan 2 gratis

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

### VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

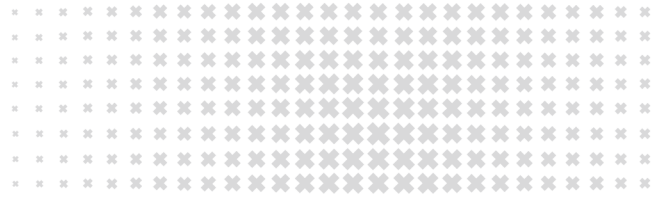
---

### HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examiner (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**



Je kan 20 punten scoren, waarvan 18 in de opgaven en 2 gratis. Om te slagen heb je 11 punten nodig. Mits duidelijk beschreven inclusief de voorwaarden, mag je de stellingen uit de cursus gebruiken.

### 1. Een dekpuntiteratie (4 punten)

Beschouw de afbeelding

$$\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{x}}.$$

**(a=2)** Bepaal een gesloten en begrensd interval  $U = [a, b]$  met de volgende eigenschappen:

- De randpunten  $a$  en  $b$  van  $U$  zijn concrete, expliciete getallen;
- $\phi$  heeft een uniek dekpunt  $\alpha \in U$ ;
- $\phi(U) \subset U$ ;
- de dekpuntiteratie  $\alpha_{j+1} = \phi(\alpha_j)$  convergeert voor alle startwaarden  $\alpha_1 \in U$  naar  $\alpha$ ;

en geef bewijs voor ieder van die eigenschappen.

**(b=1)** Bepaal een startwaarde  $\alpha_1$  voor de dekpuntiteratie en een  $j \in \mathbb{N}$  zo, dat  $|\alpha - \alpha_j| \leq 10^{-3}$ .

**(c=1)** Geef de afbeelding  $\psi$  van Newton-Raphson met de eigenschap dat  $\psi(\alpha) = \alpha$  en  $\psi'(\alpha) = 0$ .

### 2. Een contractie op $\mathbb{C}^3$ (3 punten)

Beschouw de affiene transformatie

$$\Phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 4 & i & 1 \\ -i & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

De  $3 \times 3$  matrix in dit voorschrift (inclusief de breuk die ervoor staat) noemen we  $D$ .

**(a=2)** Bewijs dat  $\Phi$  een contractie is op  $\mathbb{C}^3$  in de maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$  en geef de contractieconstante.

**(b=1)** Bewijs of ontkracht dat de spectraalstraal  $\rho(D)$  van  $D$  kleiner is dan één.

### 3. De singulierewaardendecompositie (5 punten)

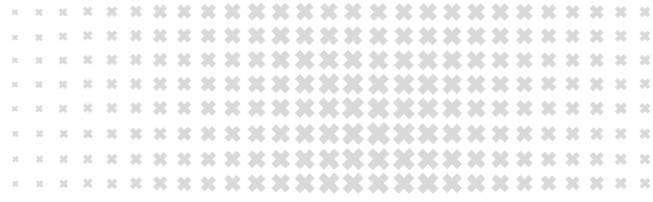
Beschouw voor iedere  $p \in \mathbb{R}$  de matrix

$$A_p = \begin{bmatrix} 1+p & 1-p & -1+p & -1-p \\ 1-p & 1+p & -1-p & -1+p \\ -1+p & -1-p & 1+p & 1-p \\ -1-p & -1+p & 1-p & 1+p \end{bmatrix}.$$

**(a=2)** Bereken de singuliere waarden van  $A_p$ .

**(b=2)** Bepaal voor iedere  $p \in \mathbb{R}$  een beste benadering  $B_p$  van rang één van de matrix  $A_p$ . Bereken ook de relatieve fout  $\|A_p - B_p\|_F / \|A_p\|_F$  in deze benadering, en zijn compressieratio.

**(c=1)** Bepaal alle  $p \in \mathbb{R}$  waarvoor  $A_p$  te schrijven is als product van vlakke rotaties.



**4. Nog meer vlakke rotaties (2 punten)**

Beschouw de volgende drie nulpatronen van reële  $4 \times 4$  matrices,

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Laat nu  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  willekeurig zijn.

Geef aan welke van bovenstaande nulpatronen, ongeacht wat de matrix  $A$  is, kunnen worden gerealiseerd middels toepassing van een eindig aantal expliciet berekenbare vlakke rotaties op  $A$ , en hoe.

De entrees op de posities met een sterretje mogen eventueel nul zijn, maar dit hoeft niet.

**5. Rekenen in een geïdealiseerd getallensysteem (4 punten)**

Laat  $q \in \mathbb{N}_0$  gegeven zijn. Beschouw het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F}_q = \{0\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \pm 2^j \mathcal{F}_q \quad \text{met} \quad \mathcal{F}_q = \{1, 1 + 2^{-q}, 1 + 2 \cdot 2^{-q}, 1 + 3 \cdot 2^{-q}, \dots, 2 - 2^{-q}\}.$$

Laat  $fl : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}_q$  de afronding van  $x \in \mathbb{R}$  naar het dichtstbijzijnde getal in  $\mathbb{F}_q$  zijn; indien er daar twee van zijn, laat  $fl(x)$  de grootste zijn in absolute waarde.

Schrijf  $\varepsilon = 2^{-q-1}$ . Dan geldt dus voor alle  $x \in \mathbb{R}$  dat  $fl(x) = x(1 + \eta)$  voor zekere  $\eta \in \mathbb{R}$  met  $|\eta| \leq \varepsilon$ .

Definieer  $x \oplus y = fl(x/y)$  voor alle  $x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0$ , en benader voor elk gegeven paar  $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$  het quotiënt  $x/y$  met  $fl(x) \oplus fl(y)$ .

**(a=2)** Bestaan er voor elk paar  $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$  getallen  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}, \hat{y} \neq 0$  met de eigenschap dat

$$fl(x) \oplus fl(y) = \hat{x}/\hat{y}, \quad \text{en} \quad |x - \hat{x}| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|x|, \quad |y - \hat{y}| \leq \varepsilon|y| ?$$

Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Veronderstel dat een computer  $C$  is voorzien van het geïdealiseerde getallensysteem  $\mathbb{F}_3$  en dat de elementaire berekeningen  $+, -, \times, \div$  op  $C$  worden benaderd door  $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ , waarbij

$$x \otimes y = fl(x * y) \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{F}_3,$$

uitgezonderd deling door nul. De computer  $C$  wordt gebruikt om het unieke nulpunt  $\alpha \in [1, 2]$  te benaderen van de continue functie

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3$$

middels de bisectiemethode. Hierbij wordt  $f(x)$  met  $x \in \mathbb{F}_3$  op  $C$  uitgerekend als  $\tilde{f}(x) = (x \otimes x) \ominus 3$ .

**(b=2)** Ga na dat  $\tilde{f}(1) \otimes \tilde{f}(2) < 0$ . De eerste benadering  $\alpha_1$  van  $\alpha$  berekend door  $C$  is dus  $(2 \oplus 1) \oslash 2$ . Wat is dus de concrete getalswaarde  $\alpha_1 \in \mathbb{F}_3$ ? Vervolgens, wat is  $\tilde{f}(\alpha_1)$ ? Wat zijn  $\tilde{f}(1) \otimes \tilde{f}(\alpha_1)$  en  $\tilde{f}(2) \otimes \tilde{f}(\alpha_1)$ ? Wat is dus  $\alpha_2$ ? Bepaal tot slot ook de op  $C$  berekende waarden van  $\alpha_3$  en  $\alpha_4$ .