Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Inleiding Numerieke Wiskunde

Bachelor wiskunde jaar 1

Hertentamen
Datum: 11 juli 2017
Tijd: 09.00-12.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 5
Maximum aantal te behalen punten: 20 waarvan 2 gratis
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Je kan 20 punten scoren, waarvan 18 in de opgaven en 2 gratis. Om te slagen heb je 11 punten nodig. Mits duidelijk beschreven inclusief de voorwaarden, mag je de stellingen uit de cursus gebruiken.

1. Een dekpuntiteratie (4 punten)

Beschouw de afbeelding

$$\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

(a=2) Bepaal een gesloten en begrensd interval $U = [a,b]$ met de volgende eigenschappen:

- De randpunten a en b van U zijn concrete, expliciete getallen;
- ϕ heeft een uniek dekpunt $\alpha \in U$;
- $\phi(U) \subset U$;
- de dekpuntiteratie $\alpha_{j+1} = \phi(\alpha_j)$ convergeert voor alle startwaarden $\alpha_1 \in U$ naar α;

en geef bewijs voor ieder van die eigenschappen.

(b=1) Bepaal een startwaarde α_1 voor de dekpuntiteratie en een $j \in \mathbb{N}$ zo, dat $|\alpha - \alpha_j| \leq 10^{-3}$.

(c=1) Geef de afbeelding ψ van Newton-Raphson met de eigenschap dat $\psi(\alpha) = \alpha$ en $\psi'(\alpha) = 0$.

2. Een contractie op $\mathbb{C}^3$ (3 punten)

Beschouw de affiene transformatie

$$\Phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 4 & i & 1 \\ -i & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

De 3×3 matrix in dit voorschrift (inclusief de breuk die ervoor staat) noemen we D.

(a=2) Bewijs dat Φ een contractie is op $\mathbb{C}^3$ in de maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ en geef de contractieconstante.

(b=1) Bewijs of ontkracht dat de spectraalstraal $\rho(D)$ van D kleiner is dan één.

3. De singulierewaardendecompositie (5 punten)

Beschouw voor iedere $p \in \mathbb{R}$ de matrix

$$A_p = \begin{bmatrix} 1+p & 1-p & -1+p & -1-p \\ 1-p & 1+p & -1-p & -1+p \\ -1+p & -1-p & 1+p & 1-p \\ -1-p & -1+p & 1-p & 1+p \end{bmatrix}.$$

(a=2) Bereken de singuliere waarden van A_p.

(b=2) Bepaal voor iedere $p \in \mathbb{R}$ een beste benadering B_p van rang één van de matrix A_p. Bereken ook de relatieve fout $\|A_p - B_p\|_F / \|A_p\|_F$ in deze benadering, en zijn compressieratio.

(c=1) Bepaal alle $p \in \mathbb{R}$ waarvoor A_p te schrijven is als product van vlakke rotaties.

4. Nog meer vlakke rotaties (2 punten)

Beschouw de volgende drie nulpatronen van reële 4×4 matrices,

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Laat nu $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ willekeurig zijn.

Geef aan welke van bovenstaande nulpatronen, ongeacht wat de matrix A is, kunnen worden gerealiseerd middels toepassing van een eindig aantal expliciet berekenbare vlakke rotaties op A, en hoe.

De entries op de posities met een sterretje mogen eventueel nul zijn, maar dit hoeft niet.

5. Rekenen in een geïdealiseerd getallensysteem (4 punten)

Laat $q \in \mathbb{N}_0$ gegeven zijn. Beschouw het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F}_q = \{0\} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \pm 2^j \mathcal{F}_q \quad \text{met} \quad \mathcal{F}_q = \{1, 1+2^{-q}, 1+2\cdot 2^{-q}, 1+3\cdot 2^{-q}, \dots, 2-2^{-q}\}.$$

Laat $fl : \mathbb{R} \to \mathbb{F}_q$ de afronding van $x \in \mathbb{R}$ naar het dichtstbijzijnde getal in $\mathbb{F}_q$ zijn; indien er daar twee van zijn, laat $fl(x)$ de grootste zijn in absolute waarde.

Schrijf $\varepsilon = 2^{-q-1}$. Dan geldt dus voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $fl(x) = x(1+\eta)$ voor zekere $\eta \in \mathbb{R}$ met $|\eta| \le \varepsilon$.

Definieer $x \oplus\!\!\!\!\div\, y = fl(x/y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0$, en benader voor elk gegeven paar $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ het quotiënt x/y met $fl(x) \oplus\!\!\!\!\div\, fl(y)$.

(a=2) Bestaan er voor elk paar $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ getallen $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}, \hat{y} \neq 0$ met de eigenschap dat

$$fl(x) \oplus\!\!\!\!\div\, fl(y) = \hat{x}/\hat{y}, \quad \text{en } |x - \hat{x}| \le (2\varepsilon + \varepsilon^2)|x|, \quad |y - \hat{y}| \le \varepsilon|y| \ ?$$

Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Veronderstel dat een computer C is voorzien van het geïdealiseerde getallensysteem $\mathbb{F}_3$ en dat de elementaire berekeningen $+, -, \times, \div$ op C worden benaderd door $\oplus, \ominus, \otimes, \oplus\!\!\!\!\div$, waarbij

$$x \circledast y = fl(x * y) \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{F}_3,$$

uitgezonderd deling door nul. De computer C wordt gebruikt om het unieke nulpunt $\alpha \in [1, 2]$ te benaderen van de continue functie

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3$$

middels de bisectiemethode. Hierbij wordt $f(x)$ met $x \in \mathbb{F}_3$ op C uitgerekend als $\tilde{f}(x) = (x \otimes x) \ominus 3$.

(b=2) Ga na dat $\tilde{f}(1) \otimes \tilde{f}(2) < 0$. De eerste benadering α_1 van α berekend door C is dus $(2 \oplus 1) \oplus\!\!\!\!\div\, 2$. Wat is dus de concrete getalswaarde $\alpha_1 \in \mathbb{F}_3$? Vervolgens, wat is $\tilde{f}(\alpha_1)$? Wat zijn $\tilde{f}(1) \otimes \tilde{f}(\alpha_1)$ en $\tilde{f}(2) \otimes \tilde{f}(\alpha_1)$? Wat is dus α_2? Bepaal tot slot ook de op C berekende waarden van α_3 en α_4.