Proeftentamen Inleiding Numerieke Wiskunde 2017

Je kan 18 punten scoren in de opgaven, en je krijgt er twee gratis. Om te slagen heb je 11 punten nodig. Mits duidelijk beschreven inclusief de voorwaarden, mag je stellingen uit de cursus vrijelijk gebruiken.

1. Een eenvoudige dekpuntiteratie (3 punten)

Voor gegeven $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, beschouw de iteratie $\alpha_{j+1} = \phi(\alpha_j)$ met $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x}$.

(a=1) Laat zien dat ϕ een uniek dekpunt α heeft en bepaal een interval $[\ell, r]$ met $\ell > 0$ zo, dat

$$\alpha \in [\ell, r] \quad \text{en} \quad \phi([\ell, r]) \subset [\ell, r].$$

(b=2) Kies $\alpha_1 = \ell$. Bewijs dat $|\alpha - \alpha_{j+1}| \leq e^{-j\ell}(r - \ell)$ voor alle $j \in \mathbb{N}$.

2. Een Newton-Raphson iteratie voor de Polaire Decompositie (6 punten)

Beschouw de vergelijking $x^2 - 1 = 0$ op $(0, \infty)$, met uniek nulpunt $\alpha = 1$.

(a=1) Formuleer de dekpuntiteratie van Newton-Raphson voor dit probleem.

(b=1) Maak met een spinnenwebgrafiek convergentie voor iedere startwaarde $\alpha_1 > 0$ aannemelijk.

Voor gegeven $X_1 \in GL_3(\mathbb{R})$, beschouw nu de iteratie $X_{j+1} = \phi(X_j)$ met

$$\phi : GL_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{3\times 3} : \quad X \mapsto \frac{1}{2}\left(X + (X^\top)^{-1}\right).$$

Veronderstel eerst dat de startmatrix X_1 een diagonaalmatrix is met positieve diagonaalelementen.

(c=1) Bewijs dat de iteratie met zo'n startmatrix X_1 convergeert en geef de limiet.

Laat nu $X_1 \in GL_3(\mathbb{R})$ willekeurig.

(d=2) Toon aan dat de rij $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ goedgedefinieerd is en convergent.

Schrijf $Q = \lim_{j\to\infty} X_j$, en laat $H = X_1 Q^\top$. Dan is natuurlijk $X_1 = HQ$.

(e=1) Laat zien dat HQ een polaire decompositie is van X_1.

Opmerking: De resultaten gelden ook voor $n \times n$ matrices.

3. Vlakke rotaties en de SVD (5 punten)

Gegeven is de orthogonale matrix

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a=2) Schrijf Q als product van drie vlakke rotaties.

(b=1) Bereken een matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ van rang twee met de eigenschap $\|Q - X\|_F \leq \|Q - Y\|_F$ voor alle matrices $Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ van rang ten hoogste twee, en toon aan dat deze matrix niet uniek is.

Laat nu $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een orthogonale $n \times n$ matrix zijn.

(c=2) Bereken de relatieve fout $e(n)$ in een beste rang-ℓ benadering U_ℓ van U,

$$e(n) = \frac{\|U - U_\ell\|_F}{\|U\|_F}.$$

Waarom is de relatieve fout in een beste rang-ℓ benadering A_ℓ van $A \in GL_n(\mathbb{R})$ niet groter dan $e(n)$?

4. Rekenen in eindige precisie (4 punten)

Beschouw het geïdealiseerde getallensysteem met slechts één significant cijfer,

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{-2^j, 2^j\}.$$

Schrijf $e = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Herinner je dat een niet-negatieve vector $v \in \mathbb{R}^n$ *stochastisch* heet als $e^\top v = 1$, en dat een niet-negatieve matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *dubbelstochastisch* heet als elke rij en kolom een stochastische vector is, oftewel, als $Me = e$ en $e^\top M = e^\top$.

(a=1) Geef de verzameling van alle stochastische vectoren in $\mathbb{F}^3$.

(b=2) Hoeveel dubbelstochastische matrices bevat $\mathbb{F}^{2\times 2}$? En $\mathbb{F}^{3\times 3}$?

Het product van dubbelstochastische matrices M, N is dubbelstochastisch. Immers,

$$MNe = Me = e \quad \text{en} \quad e^\top MN = e^\top N = e^\top.$$

Beschouw nu een computer uitgerust met het getallensysteem $\mathbb{F}$, en met rekenkundige bewerkingen

$$x \oplus y = fl(x + y) \quad \text{en} \quad x \otimes y = fl(xy),$$

waabij $fl : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ afrondt naar het dichtstbijzijnde getal in $\mathbb{F}$, en de absoluut grootste als er twee zijn.

Laat nu $M, N \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ dubbelstochastisch zijn, en bereken de entry op positie (i, j) van het product op deze computer als

$$(m_{i\,1} \otimes n_{1\,j} \oplus m_{i\,2} \otimes n_{2\,j}) \oplus m_{i\,3} \otimes n_{3\,j}.$$

(c=1) Geef een voorbeeld waarin de zo berekende matrix niet dubbelstochastisch is.