Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Inleiding Numerieke Wiskunde

Bachelor wiskunde jaar 1

Tentamen
Datum: 30 juni 2017
Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 5
Maximum aantal te behalen punten: 20 waarvan 2 gratis
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Je kan 20 punten scoren, waarvan 18 in de opgaven en 2 gratis. Om te slagen heb je 11 punten nodig. Mits duidelijk beschreven inclusief de voorwaarden, mag je de stellingen uit de cursus gebruiken.

1. De bisectiemethode voor nulpunten en wat terminologie (3 punten)

Gegeven een continue functie $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ met uniek nulpunt $\alpha \in [1,2]$ en met $f(2)f(1) < 0$. Pas de bisectiemethode toe om α te benaderen. Dit geeft een rij $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ benaderingen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ van α.

(a=1) Geef een zo scherp mogelijke *a priori bovengrens* van de absolute fout $|\alpha - \alpha_3|$.

Veronderstel nu dat $f : [1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3$.

(b=2) Bewijs de *a posteriori ondergrens* $|\alpha - \alpha_3| \geq 23/(16 \cdot 14)$ middels het *residu* voor α_3.

2. Een dekpuntiteratie met een contractie op $\mathbb{R}$ (3 punten)

Beschouw de functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+2) & (x \leq -2) \\ 0 & (-2 \leq x \leq 2) \\ -\frac{1}{2}(x-2) & (x \geq 2) \end{cases}$$

(a=2) Bewijs dat g een contractie is op $\mathbb{R}$.

(b=1) Bewijs dat de dekpuntiteratie

$$\alpha_{j+1} = g(\alpha_j)$$

voor elke gegeven startwaarde $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ na eindig veel iteraties het exacte dekpunt $\alpha = 0$ oplevert.

3. De Gauß-Seideliteratie (3 punten)

Laat $p, q, r \in \mathbb{C}$ willekeurig zijn, maar wel zo, dat het volgende stelsel eerstegraads vergelijkingen een unieke oplossing heeft,

$$\begin{bmatrix} 1 & p & q \\ -1 & 1 & r \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

De methode van Gauss en Von Seidel om de oplossing te benaderen heeft met gegeven $\alpha_1 \in \mathbb{C}^3$ de vorm

$$\alpha_{j+1} = \Phi(\alpha_j) \quad \text{met} \quad \Phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : x \mapsto c + Dx \qquad (c \in \mathbb{C}^3, D \in \mathbb{C}^{3\times 3}).$$

Geef een nodige en voldoende conditie op p, q, r waaronder de methode convergeert voor elke $\alpha_1 \in \mathbb{C}^3$.

4. Vlakke rotaties en de SVD (5 punten)

(a=2) Bepaal orthogonale matrices U en V, beide in de vorm van een product van expliciete vlakke rotaties, en een boven-bidiagonaal matrix B zo, dat

$$UBV^\top = A = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \;\; 3 \;\; 4] .$$

(b=1) Bepaal nu ook de singuliere waarden van A.

We benaderen de singuliere waarden van een 3×3 boven-bidiagonaalmatrix iteratief, waarbij één iteratie bestaat uit toepassing van de volgende vier vlakke rotaties (eerst twee van rechts, dan twee van links),

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(*,*)^\top} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}(*,*)^\top} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(*,*)} \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}(*,*)} \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

(c=2) Bewijs dat de rij van entries op positie $(1,1)$ die deze iteratie oplevert, convergent is.

5. Rekenen in een geïdealiseerd getallensysteem (4 punten)

Laat $q \in \mathbb{N}_0$ gegeven zijn. Beschouw het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \pm 2^j \mathcal{F} \quad \text{met} \quad \mathcal{F} = \{1, 1 + 2^{-q}, 1 + 2 \cdot 2^{-q}, 1 + 3 \cdot 2^{-q}, \ldots, 2 - 2^{-q}\}.$$

Laat $fl : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ de afronding van $x \in \mathbb{R}$ naar het dichtstbijzijnde getal in $\mathbb{F}$ zijn; indien er daar twee van zijn, laat $fl(x)$ de grootste zijn in absolute waarde. Schrijf $\varepsilon = 2^{-q-1}$.

(a=2) Bewijs dat er voor alle $x \in \mathbb{R}$ een $\eta \in \mathbb{R}$ bestaat met $|\eta| \leq \varepsilon$ zo, dat $fl(x) = x(1 + \eta)$.

Definieer $x \ominus y = fl(x - y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{F}$, en benader voor elk gegeven paar $x, y \in \mathbb{R}$ het verschil $x - y$ met $fl(x) \ominus fl(y)$.

(b=2) Bestaan er voor elk paar $x, y \in \mathbb{R}$ getallen $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat

$$fl(x) \ominus fl(y) = \hat{x} - \hat{y}, \quad \text{en } |x - \hat{x}| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|x|, \quad |y - \hat{y}| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|y| \ ?$$

Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.