Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 25 Oktober, 2013
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Puntentelling en tijdsindeling

Je krijgt tien punten gratis, de overige 90 kan je scoren in de drie opgaven hieronder. Er zijn tien onderdelen waarvoor je gemiddeld dus 12 minuten hebt. Sommige echter kunnen aanmerkelijk sneller worden gemaakt, terwijl andere, zoals 3(d), veel meer tijd kunnen vergen. Deel je tijd dus goed in.

1. Gram-Schmidt (GS) versus Modified Gram-Schmidt (MGS) (20 punten)

Gegeven is een voor het gemak reële $m \times 3$ matrix A met kolommen a_1, a_2, a_3.

(a=8) Doorloop de stappen van het *Gram-Schmidt* algoritme voor a_1, a_2, a_3. Geef aan hoe de kolommen q_j van Q en de entries r_{ij} van R van de resulterende QR-decompositie van A worden bepaald.

(b=8) Doorloop nu ook de stappen van het *Modified Gram-Schmidt* algoritme voor a_1, a_2, a_3. Geef wederom aan hoe de q_j en de r_{ij} van de resulterende QR-decompositie van A worden bepaald.

Geef ook duidelijk aan waar MGS verschilt van GS.

(c=4) Resulteren GS en MGS in *dezelfde* QR-decompositie van A? Motiveer!

Merk op: We hebben het hier over de *wiskundige* algoritmes, niet over hun implementatie.

2: Kleinste kwadraten problemen en Householderspiegelingen (30 punten)

Gegeven is dat $3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$. Bekijk het kleinste kwadraten probleem

$$\textit{vind } x \in \mathbb{R}^2 \textit{ waarvoor } \|b - Ax\|_2 \textit{ minimaal is}$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

(a=10) Los dit probleem op met de methode van *normaalvergelijkingen* en bepaal het *residu*.

In computerimplementaties heeft deze methode de minst gunstige stabiliteitseigenschappen. Een alternatief is de methode van *QR-decompositie* middels *Householderspiegelingen*.

Zoals bekend zijn er twee (reële) Householderspiegelingen Q met de eigenschap dat

$$QA = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

(b=10) Bereken expliciet de matrix Q van de *numeriek stabielste keuze* van die twee.

Laat nu $H = H^*$ willekeurig gegeven zijn, en U een Householderspiegeling zodanig dat de eerste kolom van UH een veelvoud is van de eerste standaardbasisvector.

(c=10) Is de matrix UHU^* dan altijd van de vorm

$$\left[\begin{array}{c|ccc} * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Natuurlijk is motivatie van je bewering gewenst.

Opgave 3: De determinant: conditie en stabiliteit (40 punten)

In deze opgave bekijken we conditionering en stabiliteit van het bepalen van de determinant van een $n \times n$ reële vierkante matrix. Laat om te beginnen $n = 2$ en laat

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Bekijk de conditionering van $\det(A) = ad - bc$ ten opzichte van perturbaties op de entry a.

(a=10) Laat zien dat het *relatieve conditiegetal* κ voor dit probleem gelijk is aan

$$\kappa = \frac{|ad|}{|\det(A)|}.$$

Impliceert dit dat het probleem slecht geconditioneerd is als $|\det(A)|$ klein is?

Zoals gebuikelijk veronderstellen we dat de komende algoritmes worden geïmplementeerd op een computer met machineprecisie ε_m, die voldoet aan de axioma's

- $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : fl(x) = x(1 + \varepsilon)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : x \circledast y = (x * y)(1 + \varepsilon)$.

Als *algoritme* voor het berekenen van de determinant van de 2×2 matrix uit (1) gebruiken we nu

$$\text{data: } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{oplossing: } \det(A), \text{ berekend als } \quad (a \otimes d) \ominus (b \otimes c). \tag{2}$$

(b=10) Is Algoritme (2) *backward stable*? Motiveer je antwoord voldoende!

Veronderstel nu dat $R = (r_{ij})$ een $n \times n$ *bovendriehoeksmatrix* is, en beschouw het voor de hand liggende algoritme om $\det(R)$ te berekenen,

$$\text{data: } R, \quad \text{oplossing: } r = \det(R), \text{ berekend als } \quad r = r_{11} \otimes r_{22} \otimes \cdots \otimes r_{nn}. \tag{3}$$

(c=10) Bewijs dat de met Algoritme 3 op de computer berekende $\tilde{r}$ voldoet aan

$$\tilde{r} = \det(R + \Delta R), \quad \text{waarbij } \frac{\|\Delta R\|}{\|R\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_m).$$

Je bent hierbij (uiteraard) vrij om je favoriete norm te kiezen en ook de volgorde waarin de vermenigvuldiging van de diagonaalentries van R in (3) plaatsvindt.

Beschouw tot slot voor *willekeurige* $n \times n$ matrices het volgende algoritme om $\det(A)$ te bepalen

$$\text{data: } A, \quad \text{oplossing: } \det(A), \text{ berekend als } \quad (-1)^\ell \cdot \det(\tilde{R}), \tag{4}$$

waarbij $\tilde{R}$ de middels $\ell \leq n - 1$ Householderspiegelingen uitgerekende bovendriehoeksfactor van een QR-decompositie van A is, en waarbij $\det(\tilde{R})$ in (4) wordt berekend met Algoritme (3). De factor $(-1)^\ell$, waarvan je mag veronderstellen dat deze exact wordt berekend, is nodig omdat iedere Householderspiegeling determinant -1 heeft.

(d=10) Bewijs dat Algoritme (4) *backward stable* is.

Hint: Formuleer nauwkeurig welke gegevens je hebt, wat je wilt bewijzen, en doe dat vervolgens (onder andere) middels een toepasselijke stelling uit het boek.