Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 20 Oktober 2014
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 2
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Puntentelling en tijdsindeling

Je krijgt tien punten gratis, de overige 90 kan je scoren in de twee opgaven hieronder. Er zijn 11 onderdelen waarvoor je gemiddeld dus 11 minuten hebt. Sommige echter kunnen aanmerkelijk sneller worden gemaakt, terwijl andere veel meer tijd kunnen vergen. Deel je tijd dus goed in.

Opgave 1: Kleinste kwadraten problemen (45 punten)

Gegeven is dat $3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$. Bekijk het kleinste kwadraten probleem

$$\textit{vind } x \in \mathbb{R}^2 \textit{ waarvoor } \|b - Ax\|_2 \textit{ minimaal is} \tag{1}$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 4 & 12 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(a=9) Bepaal de *pseudoinverse* A^+ van A en bereken hiermee vervolgens de oplossing x van (1)-(2).

(b=4+5) Bereken ook (op wat voor manier dan ook) de oplossing $\tilde{x}$ van het verstoorde probleem

$$A\tilde{x} \overset{LS}{=} \tilde{b} \quad \text{met} \quad \tilde{b} = b + \begin{bmatrix} 12\varepsilon \\ 4\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \varepsilon \neq 0.$$

en beargumenteer wat het *relatieve conditiegetal* van (1)-(2) is ten opzichte van verstoringen op b.

(c=5+4+3) Bereken middels drie *Givensrotaties* een QR-decompositie van A.

Hierbij is het voldoende om Q te geven als product van drie matrices.

Hint: je kan *naar het antwoord toewerken* door eerst even op klad die QR-decompositie op alternatieve (lees: *veel* gemakkelijkere) wijze te berekenen!

(d=6) Bepaal de *singuliere waarden* van de matrix A.

(e=9) Leg uit hoe je een kleinste kwadratenprobleem van de vorm (1) kunt oplossen middels een QR-decompositie van de uitgebreide matrix $(A|b)$ *zonder* de berekende unitaire factor Q te gebuiken.

Opgave 2: Conditionering en stabiliteit van een matrixsplitsing (45 punten)

In deze opgave bekijken we conditionering en stabiliteit van het bepalen van het symmetrische deel $f_{\mathcal{S}}(A)$ en antisymmetrische deel $f_{\mathcal{A}}(A)$ van een matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gedefinieerd door

$$A = f_{\mathcal{S}}(A) + f_{\mathcal{A}}(A) \quad \text{waarbij} \quad f_{\mathcal{S}}(A) = \frac{A + A^\top}{2} \quad \text{en} \quad f_{\mathcal{A}}(A) = \frac{A - A^\top}{2}. \tag{3}$$

We voorzien $\mathbb{R}^{2\times 2}$ van de Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$. Zoals bekend is dit de norm behorend bij het inproduct

$$\langle X, Y\rangle_F = \mathrm{Tr}(X^\top Y), \tag{4}$$

waarbij Tr staat voor het spoor (som van de diagonaalentries) van de betreffende matrix.

Kies $\beta = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ als basis van $\mathbb{R}^{2\times 2}$, met

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

en schrijf $co_\beta : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ voor de bijbehorende coördinaatafbeelding. Herinner je dat dan geldt

$$\langle X, Y\rangle_F = \langle co_\beta(X), co_\beta(Y)\rangle_2 \quad \text{en} \quad \|X\|_F = \|co_\beta(X)\|_2, \tag{6}$$

waarbij $\|\cdot\|_2$ de standaardnorm en $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ het standaardinproduct op $\mathbb{R}^4$ is.

Deel 1: Conditionering.

(a=5) Geef de matrix van f_S ten opzichte van β, dus de matrix M zodanig dat voor alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$co_\beta(f_{\mathcal{S}}(A)) = M \cdot co_\beta(A). \tag{7}$$

(b=8) Laat zien dat $f_S : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ een *orthogonale projectie* is.

We bekijken nu de conditionering van $f_{\mathcal{S}}$ in $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ten opzichte van perturbaties op A.

(c=9) Bepaal het *relatieve conditiegetal* κ voor dit probleem ten opzichte van de Frobeniusnorm.

Zijn er matrices in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ waarin $f_{\mathcal{S}}$ slecht geconditioneerd is?

Deel 2: Stabiliteit. Onze computer voldoet aan de axioma's van *floating point arithmetic*:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x \circledast y = fl(x * y)$;
- $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \le \varepsilon_m : fl(x) = x(1+\varepsilon)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \le \varepsilon_m : x \circledast y = (x * y)(1+\varepsilon)$,

waarbij ε_m de *relatieve machineprecisie* is. Net als in Trefethen & Bau gaan we er van uit dat er geen grootste en kleinste machinegetal bestaat, en dus dat $\mathbb{F}$ *self-similar* is, met $\mathbb{F} = 2\mathbb{F}$.

We berekenen $f_{\mathcal{S}}(A)$ en $f_{\mathcal{A}}(A)$ nu met de volgende *algoritmes* $\tilde{f_{\mathcal{S}}}$ en $\tilde{f_{\mathcal{A}}}$ als

$$\tilde{f_{\mathcal{S}}}(A) = (A \oplus A^\top) \oslash 2 \quad \text{en} \quad \tilde{f_{\mathcal{A}}}(A) = A \ominus \tilde{f_{\mathcal{S}}}(A). \tag{8}$$

Hierbij betekenen de operaties $\oplus$ en $\ominus$ tussen twee matrices niets anders dan het *elementsgewijs toepassen* van de scalaire operaties $\oplus$ en $\ominus$. Evenzo staat $\oslash 2$ voor het elementsgewijs delen door twee.[1] Gegeven is dat de matrix A bestaat uit machinegetallen.

In de komende onderdelen kan het inzichtelijk zijn om voor jezelf even te kijken wat er gebeurt onder de aanname dat de relatieve machineprecisie ε_m gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

(d=5) Geef een lijst van alle machinegetallen x met $\frac{1}{4} \le x \le 8$ in het geval dat $\varepsilon_m = \frac{1}{4}$.

Keer nu weer terug naar de algemene setting met willekeurige ε_m.[2]

(e=9) Bewijs of weerleg dat algoritme $\tilde{f_{\mathcal{S}}}$ *backward stable* is.

(f=9) Bewijs of weerleg dat algoritme $\tilde{f_{\mathcal{A}}}$ *backward stable* is.

[1] Trefethen & Bau gebruiken een omcirkeld ÷ teken maar ik kan dat niet vinden in LaTeX :-(

[2] Dat moet ook wel, want *backward stability* is een concept dat is gedefinieerd in termen van $\mathcal{O}(\varepsilon_m)$ voor $\varepsilon_m \to 0$