Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

# Tentamen

## Numerieke Lineaire Algebra

### Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 22 Oktober 2015
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 2
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

**VOORDAT U BEGINT**

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

---

**HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN**

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**

**1. Vandermonde, Householder, Givens, Gauss, en Cholesky (50 punten)**

Gegeven zijn de volgende vier datapunten in $\mathbb{R}^2$,

$$(x_1, b_1) = (-7, -9), \quad (x_2, b_2) = (-1, 3), \quad (x_3, b_3) = (1, 5), \quad (x_4, b_4) = (7, 5).$$

We gaan op zoek naar het lineaire polynoom $\ell$ dat de kwadraatsom

$$\sum_{j=1}^{4} (\ell(x_i) - b_i)^2$$

minimaliseert over de reële vectorruimte $\mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ van lineaire polynomen.

**(a=6)** Herformuleer[1] dit probleem als *kleinstekwadratenprobleem*

$$Ax \stackrel{LS}{=} b \tag{1}$$

voor zekere *Vandermondematrix* $A$.

Er bestaat een *Householderspiegeling* die de eerste kolom van $A$ afbeeldt op een *positief* veelvoud van de eerste standaardbasisvector.

**(b=8)** Bepaal de matrix $H$ van deze spiegeling en bereken $HA$.

**(c=7)** Breng de resulterende matrix $HA$ middels *Givensrotaties* op bovendriehoeksvorm.

**(d=7)** Bereken de oplossing $x$ van (1) middels de in (b)-(c) gevonden QR-decompositie van $A$.

Alternatief van de berekening van $x$ middels de QR-decompositie is de berekening van $x$ middels de *thin* SVD van $A$, oftewel, een decompositie $A = U\Sigma V$ waarin $\Sigma$ dezelfde afmetingen heeft als $A$.

**(e=7)** Bepaal een *thin* SVD van $A$ en bereken hiermee de oplossing $x$ van (1), ter controle van (d).

Beschouw tot slot het probleem het *kwadratische* polynoom $q$ te vinden dat de kwadraatsom

$$\sum_{j=1}^{4} (q(x_i) - b_i)^2$$

minimaliseert over de reële vectorruimte $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ van *kwadratische* polynomen. Dit resulteert net als bij onderdeel (a) in een kleinste kwadratenprobleem $Bx \stackrel{LS}{=} b$ voor zekere Vandermondematrix $B$.

**(f=7)** Bepaal expliciet de *normaalvergelijkingen van Gauss* horend bij dit probleem.

**(g=8)** Los deze op middels *Choleskydecompositie* van de bijbehorende matrix.

[1] Als je dit niet kunt, kan je het antwoord vragen, maar dan uiteraard geen punten meer scoren voor dit onderdeel

**Opgave 2: Conditie en stabiliteit (40 punten)**

In de *combinatorische lineaire algebra* speelt de *permanent* van een *niet-negatieve* matrix een belangrijke rol. Voor $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ met $A \geq 0$ entry-gewijs, oftewel voor

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad a, b, c, d \geq 0,$$

is deze gedefinieerd als

$$\mathrm{per}(A) = ad + bc. \tag{2}$$

We bekijken de conditionering van het berekenen van $\mathrm{per}(A)$ onder perturbatie van de entry $a$ van $A$.

**(a=8)** Bepaal het *relatieve conditiegetal* voor dit probleem.

**(b=5)** Bespreek kort wanneer het probleem goed dan wel slecht geconditioneerd is.

Zoals gebruikelijk veronderstellen we dat algoritme (3) wordt geïmplementeerd op een computer met *relatieve machineprecisie* $\varepsilon_m$, die voldoet aan de axioma's

- $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : fl(x) = x(1+\varepsilon)$;
- $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : x \circledast y = (x * y)(1+\varepsilon)$.

Hierbij is $\mathbb{F}$ de aftelbaar oneindige verzameling van geïdealiseerde machinegetallen; we houden dus geen rekening met eventuele *overflow* of *underflow*. Veronderstel vanaf nu voor het gemak dat $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

Een zeer voor de hand liggend *algoritme* om $\mathrm{per}(A)$ in (2) uit te rekenen is nu

$$\overline{\mathrm{per}}(A) = (a \otimes d) \oplus (b \otimes c). \tag{3}$$

We schrijven $\overline{\mathrm{per}}$ om de *berekende waarde* van de permanent te onderscheiden van de *echte* waarde.

**(c=9)** Bewijs dat Algoritme (3) *backward stable* is ten opzichte van de Frobeniusnorm.

De *formule van Ryser* berekent de permanent van *grotere* $n \times n$ matrices op efficiënte wijze. Voor $2 \times 2$ matrices reduceert deze formule tot het correcte maar niet bepaald efficiënte(re)

$$\mathrm{per}(A) = (a+b)(c+d) - ac - bd. \tag{4}$$

We implementeren vervolgens het volgende nieuwe algoritme, gebaseerd op (4), om $\mathrm{per}(A)$ te berekenen,

$$\tilde{\mathrm{per}}(A) = [(a \oplus b) \otimes (c \oplus d) \ominus (a \otimes c)] \ominus (b \otimes d), \tag{5}$$

op een "computer" die voldoet aan bovenstaande axioma's met relatieve machineprecisie $\varepsilon_m = \frac{1}{8}$.

**(d=9)** Geef alle $f \in \mathbb{F}$ met $1 \leq f \leq 2$ en beschrijf hoe deze deelverzameling $\mathbb{F}$ volledig bepaalt.

**(e=9)** Geef met $\mathbb{F}$ als in (d) een voorbeeld van een $\mathbb{F}^{2\times 2} \ni A \geq 0$ waarvoor $\tilde{\mathrm{per}}(A) < 0$.

De met Algoritme (5) *berekende* permanent van een niet-negatieve matrix is dus in het algemeen niet de *exacte* permanent van een *naburige* niet-negatieve matrix.