UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 28 Oktober 2016
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100 (10 gratis)
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Opgave 1: Finite Precision Arithmetic (24 punten)

Zij $\mathbb{F}$ het geïdealiseerde binaire getallensysteem waarin slechts één significant bit wordt gebruikt, oftewel,

$$\mathbb{F} = \{-2^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beschouw een (evenzo geïdealiseerde) computer C uitgerust met dit getallensysteem.

(a=4) Wat is in de waarde van de relatieve machineprecisie ε_m van C?

Veronderstel dat de vier elementaire rekenkundige bewerkingen $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$ op C zijn geïmplementeerd als $\circledast$, waarbij

$$x \circledast y = \text{fl}(x * y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}, \quad x * y \in \mathbb{R}).$$

Hier is fl$(z) \in \mathbb{F}$ het grootste getal in absolute waarde waarvoor $|z - \text{fl}(z)| \leq |z - u|$ voor alle $u \in \mathbb{F}$.

Dus fl(z) is de beste benadering in $\mathbb{F}$ van $z \in \mathbb{R}$, en als er daar twee zijn, dan degene het verst van nul.

(b=4) Bewijs dat $\odot$ op C hiermee voldoet aan $x \odot y = x \cdot y$ voor alle $x, y \in \mathbb{F}$.

(c=4) Geef expliciet drie getallen $x, y, z \in \mathbb{F}$ waarvoor $(x \oplus y) \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z)$.

Laat $O^{n\times n}(\mathbb{F})$ de verzameling van $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ zijn waarvoor *in exacte arithmetiek* geldt $Q^\top Q = I$.

(d=12) Bewijs dat $O^{n\times n}(\mathbb{F})$ precies $n!2^n$ matrices bevat indien $n \in \{2, 3\}$.

Hint: Begin met $n = 2$, bedenk welke die $2!2^2 = 8$ matrices zijn, en laat zien dat er geen andere zijn.

2. Kleinste-kwadratenproblemen (24 punten)

Gegeven zijn vier punten in $\mathbb{R}^3$,

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad p_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

Aanname P: De punten p_1, p_2, p_3, p_4 liggen zodanig in $\mathbb{R}^3$, dat er een uniek vlak V bestaat met vergelijking $z = \alpha + \beta x + \gamma y$ dat de eigenschap heeft dat

$$\sum_{j=1}^{4} (z_j - (\alpha + \beta x_j + \gamma y_j))^2$$

minimaal is over alle keuzes van de parameters $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a=12) Formuleer een kleinste-kwadratenprobleem van de gebruikelijke vorm

$$Au \overset{LS}{=} b \tag{1}$$

dat het drietal parameters α, β, γ bepaalt dat hoort bij dit unieke vlak V.

Laat nu

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

en beschouw vanaf nu het stelsel (**??**) voor deze expliciete keuze.

(b=12) Laat zien dat niet is voldaan aan Aanname P en geef twee oplossingen $u_1 \neq u_2$ van (**??**).

3. Conditie en stabiliteit van het uitwendig product(42 punten)

Het uitwendig product *(cross product)* $u \times v \in \mathbb{R}^3$ van $u, v \in \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als

$$u \times v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{3}$$

en is een vector loodrecht op u en v met lengte: de oppervlakte van het parallellogram $O, u, v, u + v$.

In het bijzonder geldt dus dat $u \times v = 0$ als en alleen als u en v lineair afhankelijk zijn.

In wat nu volgt beschouwen we de *relatieve conditionering* van het probleem $u \times v$ te bepalen onder perturbaties op u en v,

$$f: \quad \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^3: \quad [u|v] \mapsto u \times v,$$

waarbij we het domein van f gemakshalve als 3×2 matrices $[u|v]$ met kolommen u en v beschouwen.

We voorzien dit domein $\mathbb{R}^{3\times 2}$ van de Frobeniusnorm en het co-domein $\mathbb{R}^3$ van de standaardnorm.

Het probleem f is niet op het *gehele* domein $\mathbb{R}^{3\times 2}$ goed geconditioneerd.

(a=9) Bedenk slim gekozen perturbaties op slim gekozen $u, v \in \mathbb{R}^3$ waaruit dit blijkt.

We beperken ons nu tot de elementen $[u|v]$ uit het domein $\mathbb{R}^{3\times 2}$ waarvoor u en v *orthonormaal* zijn.

(b=12) Bewijs dat het probleem op deze deelverzameling van het domein goed geconditioneerd is.

Hint: Door onze specifieke normkeuze is de conditionering invariant onder unitaire transformaties.

We beschouwen nu algoritmes op een geïdealiseerde computer die voldoet aan het *Fundamental Axiom of Finite Precision Arithmetic* met de gebruikelijke machinebewerkingen $\circledast$ voor $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$.

We beperken ons nu tot de elementen $[u|v]$ uit het domein $\mathbb{R}^{3\times 2}$ waarvoor $u = (u_1, 0, 0)^\top$ voor zekere $u_1 \in \mathbb{R}$. Op deze deelruimte van het domein bekijken we het volgende algoritme om $u \times v$ te berekenen,

$$\hat{f}: \quad [u|v] \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{fl}(u_1) \odot \mathrm{fl}(v_3) \\ \mathrm{fl}(u_1) \odot \mathrm{fl}(v_2) \end{bmatrix},$$

Zie de overeenkomst met (**??**) onder de aanname dat $u_2 = u_3 = 0$.

(c=9) Bewijs dat Algoritme $\hat{f}$ *backward stable* is.

Laat $u, v \in \mathbb{R}^3$ nu weer *willekeurig zijn*.

(d=12) Ontwerp nu zelf een *backward stable* algoritme dat $u \times v$ berekent.

Motiveer in globale termen waarom dit algoritme backward stable is. Je mag hierbij desgewenst gebruik maken van stellingen en opgaven uit het boek.