Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 27 Oktober 2017
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 4
Maximum aantal te behalen punten: 100 (10 gratis)
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Opgave 1: Finite Precision Arithmetic and Backward Stability (26 punten)

Zij $\mathbb{F}$ het geïdealiseerde machinegetallensysteem waarin drie significante bits uit $\{0, 1\}$ worden gebruikt.

(a=6) Geef de doorsnede $\mathbb{F} \cap [1, 2]$ en geef de relatieve machineprecisie ε horend bij $\mathbb{F}$.

Beschouw een (evenzo geïdealiseerde) computer C uitgerust met dit getallensysteem. Veronderstel dat de vier elementaire rekenkundige bewerkingen $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ op C zijn geïmplementeerd als $\circledast$, waarbij

$$x \circledast y = \mathrm{fl}(x * y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}, \quad x * y \in \mathbb{R}).$$

Hier is fl$(z) \in \mathbb{F}$ het grootste getal in absolute waarde waarvoor $|z - \mathrm{fl}(z)| \leq |z - u|$ voor alle $u \in \mathbb{F}$.

Dus fl(z) is de beste benadering in $\mathbb{F}$ van $z \in \mathbb{R}$, en als er daar twee zijn, dan degene het verst van nul. Merk op dat dit impliceert dat $x \circledast y = (x * y)(1 + \eta)$ voor zekere η met $|\eta| \leq \varepsilon$.

(b=6) Bestaan er voor elk paar $x, y \in \mathbb{R}$ getallen $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat

$$fl(x) \ominus fl(y) = \hat{x} - \hat{y}, \quad \text{en } |x - \hat{x}| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|x|, \quad |y - \hat{y}| \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)|y| \ ?$$

Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Voor gegeven $x, y \in \mathbb{F}$ met $x \leq y$ berekenen we op C het gemiddelde G van x en y als

$$G = (x \oplus y) \oslash 2. \tag{1}$$

(c=7) Bewijs dat $x \leq G \leq y$.

Beschouw nu het geïdealiseerde *decimale* getallensysteem $\mathbb{D}$ met drie significante cijfers uit $\{0, \ldots, 9\}$. Maak dezelfde veronderstelingen over op een computer uitgevoerde berekeningen als boven.

(d=7) Geef een voorbeeld dat aantoont dat $G = (x \oplus y) \oslash 2$ buiten het interval $[x, y]$ kan liggen.

2. Vlakke rotaties en spiegelingen (20 punten)

Laat $U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ reëel orthogonaal zijn, oftewel, $U^\top U = I$.

(a=6) Bewijs dat als U bovendriehoeks is, U een diagonaalmatrix is met diagonaalentries uit $\{-1, 1\}$.

Het resultaat van (a) is een hint voor onderdelen (b) en (c). Laat $U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ reëel orthogonaal zijn.

(b=7) Bewijs dat U het product is van maximaal vier spiegelingen in driedimensionale hypervlakken.

(c=7) Bewijs dat U het product is van maximaal zes vlakke rotaties en maximaal één spiegeling.

In onderdelen (b) en (c) is het product van *nul* afbeeldingen de identieke afbeelding.

3. Kleinste kwadraten (LLS) problemen (24 punten)

Schrijf $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Een *bilineaire vorm* op Ω is een afbeelding van de gedaante

$$B : \Omega \to \mathbb{R} : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto a + bx + cy + dxy, \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R}).$$

Laat nu $F : \Omega \to \mathbb{R}$ een willekeurige afbeelding op Ω zijn, en laat

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de verzameling van hoekpunten zijn van het vierkant Ω.

(a=6) Laat zien dat er precies één bilineaire vorm B bestaat zo, dat $B(v) = F(v)$ voor alle $v \in V$.

Laat nu $m = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^\top$ en $W = V \cup \{m\}$. Beschouw het probleem een bilineaire vorm G te vinden zo, dat voor alle bilineaire vormen H op Ω,

$$\sum_{w \in W} |G(w) - F(w)|^2 \leq \sum_{w \in W} |H(w) - F(w)|^2 \tag{2}$$

(b=6) Formuleer een LLS-probleem waarvan elke oplossing in $\mathbb{R}^4$ een oplossing G van (2) induceert.

(c=6) Laat zien dat het LLS-probleem in (b) een unieke oplossing heeft.

(d=6) Laat zien hoe je met behulp van een SVD de oplossing G van (2) kunt bepalen.

Hierbij hoef je geen expliciete SVD van je LLS-matrix te bepalen, slechts een in symbolen. Geef wel duidelijk de correcte afmetingen weer van alle matrices en vectoren die een rol spelen in de uitleg.

4. Conditie en stabiliteit (20 punten)

Beschouw het probleem om een QR decompositie te bepalen van een reële 2×1 matrix,

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto (Q, R) = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

We beschouwen in het bijzonder de conditie van het bepalen van R onder perturbaties op A.

(a=8) Geef hiervan het absolute en het relatieve 2-norm conditiegetal.

Beschouw een computer C met geïdealiseerde floating point machinegetallen $\mathbb{F}$, met machineprecisie ε die voldoet aan de *Fundamental Axiom of Finite Precision Arithmetic*. Veronderstel dat S een backward stable algoritme is voor de berekening op C van de wortel van een *niet-negatief* machinegetal $x \in \mathbb{F}$.

(b=5) Definieer in gedetailleerde wiskundige termen weer wat backward stabiliteit van S betekent.

Het volgende algoritme wordt nu gebruikt om de matrix R uit de QR-decompositie van A te berekenen,

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} S((a \otimes a) \oplus (b \otimes b)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

waarbij we aannemen dat $a, b \in \mathbb{F}$. Het symbool $\hat{R}$ staat du voor het op C berekende resultaat.

(c=7) Bewijs dat dit algoritme backward stable is.