

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 20 december, 2013
Tijd: 15.00-17.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

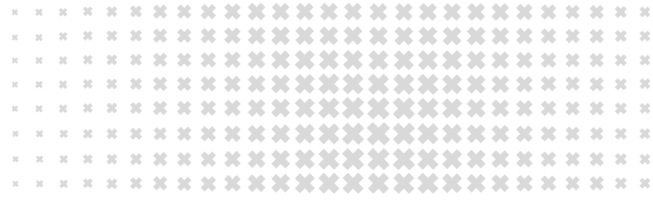
VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examiner (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!



Puntentelling en tijdsindeling

Je krijgt tien punten gratis. Er zijn tien onderdelen van 9 punten waarvoor je gemiddeld dus 12 minuten hebt. Opgave 1 en 2 zijn beide 36 punten waard zijn, maar ik vermoed dat Opgave 2 (mits je de definities kent) een stuk sneller gemaakt kan worden dan Opgave 1. Deel je tijd daarom goed in!

1. De SVD: bidiagonalisatie gevolgd door gerichte Jacobi-sweeps (36 punten)

We zijn geïnteresseerd in de *singuliere waarden decompositie* van een reële 4×4 matrix A ,

$$A = U\Sigma V^T, \quad (1)$$

waarbij U en V orthogonale 4×4 matrices zijn, en Σ diagonaal en niet-negatief.

(a=9) Beschrijf stap voor stap hoe het *Golub-Kahan algoritme* de matrix A *bidiagonaliseert*.

Deze bidiagonalisatie is de *eerste fase* in de berekening van de singuliere waarden. We veronderstellen vanaf nu dat A bidiagonaal is, en bovendreihoecks (een bidiagonaalmatrix kan ook benedendreihoecks zijn), oftewel,

$$A = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Herinner je dat een *Jacobi-rotatie* een rotatie in een tweedimensionale deelruimte is, die als doel heeft om één of meerdere nullen te creëren buiten de diagonaal van een matrix.

Bij de berekening van *eigenwaarden* middels de Jacobi-methode loont het niet om je matrix eerst te tridiagonaliseren als je vervolgens Jacobi-rotaties gaat toepassen. Bijvoorbeeld, als

$$B = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad (3)$$

gaat de tridiagonaalvorm verloren tengevolge van rotaties. Bij bidiagonaalmatrices is dit *niet altijd* zo.

(b=9) Ontwerp een algoritme dat *Jacobi-sweeps* toepast op A , teneinde de (Frobenius-)norm van het buitendiagonaaldeel van de matrix te verkleinen¹, en *waarbij de bidiagonaalstructuur behouden blijft*.

(c=9) Geeft expliciet de Jacobi-rotatie J en de matrix X zodanig dat

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} J \quad (4)$$

met $x_{11} = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $x_{12} = 0$.

(d=9) Analyseer tot slot de convergentie van je algoritme uit (b) voor de 2×2 bidiagonaalmatrix

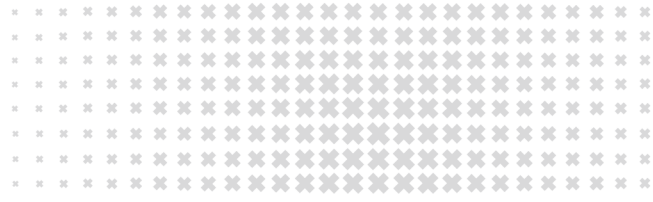
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Hint 1: Waarom mag je zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat $a \geq 0$ en $c \geq 0$?

Hint 2: Hoe veranderen kwalitatief de niet-negatief veronderstelde diagonaalentries na iedere sweep?

Hint 3: Hoe verandert kwalitatief de Frobeniusnorm van de 2×2 matrix na iedere sweep?

¹Je hoeft op dit moment nog geen idee te hebben over eventuele convergentie



2. Arnoldi en GMRES (36 punten)

Beschouw het eigenwaardeprobleem $Av = \lambda v$ en het lineaire stelsel $Ax = b$, waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

De *Arnoldi iteratie* produceert in stap k een orthonormale basis $\beta_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ voor de k -de *Krylov deelruimte* $\mathcal{K}_k(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$. Schrijf V_k voor de matrix met kolommen v_1, \dots, v_k .

(a=9) Bepaal deze orthonormale basis β_k voor $\mathcal{K}_k(A, b)$ ingeval $k = 5$: geef zijn matrixvorm V_5 .

Transformeren we A naar de orthonormale basis β_k dan resulteert zijn *upper Hessenberg* vorm H_{kk} .

(b=9) Bepaal H_{kk} voor $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Stap k van de *Arnoldi methode* geeft benaderingen $\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_k^{(k)}$ van k van de eigenwaarden van A .

(c=9) Bereken de *Arnoldi eigenwaarde benaderingen*, oftewel de *Ritz-waarden*, in stappen $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

De *Generalized Minimal Residual Method* GMRES benadert de oplossing x van $Ax = b$ met het element $x_k \in \mathcal{K}_k(A, b)$ waarvoor het residu $r_k = b - Ax_k$ minimale standaardnorm heeft.

(d=9) Bereken de GMRES benaderingen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

3. De wonderbaarlijke connectie tussen het QR-algoritme en inverse iteratie (18 punten)

Laat A een reële symmetrische $n \times n$ matrix zijn met eigenwaarden die voldoen aan

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Schrijf e_j voor de j -de standaardbasisvector van \mathbb{R}^n .

Gegeven een gehele $k \geq 1$, laat $A^k = QR$ een QR-decompositie van A^k zijn.

(a=9) Laat zien dat

$$\frac{A^k e_1}{\|A^k e_1\|} = Q e_1. \quad (6)$$

Dus, $Q e_1$ is de machtsmethodebenadering van de dominante eigenvector van A met startvector e_1 .

Door een wonderbaarlijke samenloop van omstandigheden blijkt tevens dat

$$\frac{(A^{-1})^k e_n}{\|(A^{-1})^k e_n\|} = Q e_n. \quad (7)$$

Dus, de *laatste* kolom van *diezelfde* Q is de inverse-iteratiebenadering van de dominante eigenvector van A^{-1} met startvector e_n .

(b=9) Bewijs (7): maak hierbij handig gebruik van de matrix $P = (e_n | \dots | e_1)$ en het feit dat $A = A^\top$.