UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

**Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica**

# Tentamen

## Numerieke Lineaire Algebra

### Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 20 december, 2013
Tijd: 15.00-17.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

**VOORDAT U BEGINT**

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

---

**HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN**

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**

**Puntentelling en tijdsindeling**

Je krijgt tien punten gratis. Er zijn tien onderdelen van 9 punten waarvoor je gemiddeld dus 12 minuten hebt. Opgave 1 en 2 zijn beide 36 punten waard zijn, maar ik vermoed dat Opgave 2 (mits je de definities kent) een stuk sneller gemaakt kan worden dan Opgave 1. Deel je tijd daarom goed in!

**1. De SVD: bidiagonalisatie gevolgd door gerichte Jacobi-sweeps (36 punten)**

We zijn geïnteresseerd in de *singuliere waarden decompositie* van een reële $4 \times 4$ matrix $A$,

$$A = U\Sigma V^\top, \tag{1}$$

waarbij $U$ en $V$ orthogonale $4 \times 4$ matrices zijn, en $\Sigma$ diagonaal en niet-negatief.

**(a=9)** Beschrijf stap voor stap hoe het *Golub-Kahan algoritme* de matrix $A$ *bidiagonaliseert*.

Deze bidiagonalisatie is de *eerste fase* in de berekening van de singuliere waarden. We veronderstellen vanaf nu dat $A$ bidiagonaal is, en bovendriehoeks (een bidiagonaalmatrix kan ook benedendriehoeks zijn), oftewel,

$$A = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Herinner je dat een *Jacobi-rotatie* een rotatie in een tweedimensionale deelruimte is, die als doel heeft om één of meerdere nullen te creëren buiten de diagonaal van een matrix.

Bij de berekening van *eigenwaarden* middels de Jacobi-methode loont het niet om je matrix eerst te tridiagonaliseren als je vervolgens Jacobi-rotaties gaat toepassen. Bijvoorbeeld, als

$$B = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \tag{3}$$

gaat de tridiagonaalvorm verloren tengevolge van rotaties. Bij bidiagonaalmatrices is dit *niet altijd* zo.

**(b=9)** Ontwerp een algoritme dat *Jacobi-sweeps* toepast op $A$, teneinde de (Frobenius-)norm van het buitendiagonaaldeel van de matrix te verkleinen[1], en *waarbij de bidiagonaalstructuur behouden blijft*.

**(c=9)** Geeft expliciet de Jacobi-rotatie $J$ en de matrix $X$ zodanig dat

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} J \tag{4}$$

met $x_{11} = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $x_{12} = 0$.

**(d=9)** Analyseer tot slot de convergentie van je algoritme uit (b) voor de $2 \times 2$ bidiagonaalmatrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

*Hint 1:* Waarom mag je zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat $a \geq 0$ en $c \geq 0$?

*Hint 2:* Hoe veranderen kwalitatief de niet-negatief veronderstelde diagonaalentries na iedere sweep?

*Hint 3:* Hoe verandert kwalitatief de Frobeniusnorm van de $2 \times 2$ matrix na iedere sweep?

[1] Je hoeft op dit moment nog geen idee te hebben over eventuele convergentie

## 2. Arnoldi en GMRES (36 punten)

Beschouw het eigenwaardeprobleem $Av = \lambda v$ en het lineaire stelsel $Ax = b$, waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

De *Arnoldi iteratie* produceert in stap $k$ een orthonormale basis $\beta_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$ voor de $k$-de *Krylov deelruimte* $\mathcal{K}_k(A, b) = \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}$. Schrijf $V_k$ voor de matrix met kolommen $v_1, \ldots, v_k$.

**(a=9)** Bepaal deze orthonormale basis $\beta_k$ voor $\mathcal{K}_k(A, b)$ ingeval $k = 5$: geef zijn matrixvorm $V_5$.

Transformeren we $A$ naar de orthonormale basis $\beta_k$ dan resulteert zijn *upper Hessenberg* vorm $H_{kk}$.

**(b=9)** Bepaal $H_{kk}$ voor $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Stap $k$ van de *Arnoldi methode* geeft benaderingen $\mu_1^{(k)}, \ldots, \mu_k^{(k)}$ van $k$ van de eigenwaarden van $A$.

**(c=9)** Bereken de *Arnoldi eigenwaarde benaderingen*, oftewel de *Ritz-waarden*, in stappen $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

De *Generalized Minimal Residual Method* GMRES benadert de oplossing $x$ van $Ax = b$ met het element $x_k \in \mathcal{K}_k(A, b)$ waarvoor het residu $r_k = b - Ax_k$ minimale standaardnorm heeft.

**(d=9)** Bereken de GMRES benaderingen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

## 3. De wonderbaarlijke connectie tussen het QR-algoritme en inverse iteratie (18 punten)

Laat $A$ een reële symmetrische $n \times n$ matrix zijn met eigenwaarden die voldoen aan

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Schrijf $e_j$ voor de $j$-de standaardbasisvector van $\mathbb{R}^n$.

Gegeven een gehele $k \geq 1$, laat $A^k = QR$ een QR-decompositie van $A^k$ zijn.

**(a=9)** Laat zien dat

$$\frac{A^k e_1}{\|A^k e_1\|} = Qe_1. \tag{6}$$

Dus, $Qe_1$ is de machtsmethodebenadering van de dominante eigenvector van $A$ met startvector $e_1$.

Door een wonderbaarlijke samenloop van omstandigheden blijkt tevens dat

$$\frac{\left(A^{-1}\right)^k e_n}{\|\left(A^{-1}\right)^k e_n\|} = Qe_n. \tag{7}$$

Dus, de *laatste* kolom van *diezelfde* $Q$ is de inverse-iteratiebenadering van de dominante eigenvector van $A^{-1}$ met startvector $e_n$.

**(b=9)** Bewijs (7): maak hierbij handig gebruik van de matrix $P = (e_n | \ldots | e_1)$ en het feit dat $A = A^\top$.