UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Eerste Deeltentamen
Datum: 18 december, 2014
Tijd: 10.00-12.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Puntentelling en tijdsindeling

Je krijgt tien punten gratis. Er zijn negen onderdelen van 10 punten. Deel je tijd goed in!

1. Diagonaal plus rang-1 eigenproblemen (30 punten)

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a=10) Bepaal een eigenwaarde met een bijbehorende eigenvector van A.

Veronderstel dat na deflatie van het bij (a) gevonden eigenpaar het eigenprobleem voor B resulteert,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b=10) Geef de *seculiere vergelijking* $f(\lambda) = 0$ voor de eigenwaarden van B. Schets de grafiek van f.

Schrijf λ voor de grootste eigenwaarde λ van B.

(c=10) Bewijs dat $\lambda \leq 79$, of sterker nog, dat $\lambda < 79$. Laat tevens zien dat $\lambda > 78$.

Bewijs je alleen dat $\lambda \leq 79$, dan scoor je maximaal 7 van de 10 punten.

2. Relatie QR-iteratie en Inverse Iteratie, ook voor niet-symmetrische A (10 punten)

In *Trefethen & Bau* wordt de relatie $A = A^\top$ expliciet gebruikt om te laten zien dat de laatste kolom van de matrix Q uit de QR-decompositie

$$A^k = QR \tag{1}$$

gelijk is aan de k-de iterand van de *inverse iteratie*, toegepast op A met startvector e_n, de laatste standaard basisvector van $\mathbb{R}^n$, oftewel,

$$\frac{\left(A^{-1}\right)^k e_n}{\| \left(A^{-1}\right)^k e_n \|} = Q e_n. \tag{2}$$

Dit suggereert wellicht, onterecht, dat een dergelijke relatie niet geldt als $A \neq A^\top$.

Laat daarom A in (1) nu een *willekeurige, eventueel zelfs complexe* $n \times n$ matrix zijn.

Bewijs dat de laatste kolom van de matrix Q uit de QR-decompositie in (1) gelijk is aan de k-de iterand van de *inverse iteratie*, toegepast op A^* met startvector e_n, oftewel,

$$\frac{\left(A^{-*}\right)^k e_n}{\| \left(A^{-*}\right)^k e_n \|} = Q e_n, \tag{3}$$

waarbij A^{-*} zoals gebruikelijk staat voor de inverse van A^*, aannemend dat deze bestaat.

3. Cholesky-decompositie van een tridiagonaalmatrix (30 punten)

Laat $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische positief definiete tridiagonaalmatrix zijn,

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ c_1 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & d_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Schrijf $T = R^\top R$ voor de Cholesky-factorisatie van T, oftewel, R is bovendriehoeks.

(a=10) Bewijs dat R bidiagonaal is,

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & u_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & r_n \end{bmatrix}.$$

Gegeven T kunnen de rijen $(r_j)_{j=1}^{n}$ en $(u_j)_{j=1}^{n-1}$ middels een gekoppelde recursie worden uitgerekend.

(b=10) Druk r_1 en u_1 uit in termen van de data, en geef vervolgens de recursies die, gegeven $r_1, \ldots, r_j$ en $u_1, \ldots, u_j$ en de data de volgende termen r_{j+1} en u_{j+1} definiëren.

(c=10) Bestaat er een *benedendriehoeksmatrix* L met $T = L^\top L$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

4. Bidiagonalisatie en interlacende singuliere waarden (20 punten)

Laat $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$.

(a=10) Beschrijf stap voor stap hoe A middels geschikt gekozen Householderreflecties kan worden *gebidiagonaliseerd*. Schrijf B voor de resulterende bovendriehoeksbidiagonaalmatrix. Geef de relatie tussen de singuliere waarden én -vectoren van A en B expliciet weer.

(b=2+5+3)

(1) Wat is de eigenwaarden *interlacing property* van *principal submatrices* van symmetrische matrices?

(2) Bewijs, of ontkracht, dat de *singuliere waarden* van de *principal submatrices* van B *interlacen*.

(3) Geef een voorbeeld van een matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ waarvan de singuliere waarden *niet* interlacen.

Je mag bij onderdeel b(3) zelf een waarde voor n kiezen.