UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Tweede Deeltentamen
Datum: 14 december, 2015
Tijd: 10.00-12.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Puntentelling

Je kan 90 punten scoren voor de onderstaande 3 opgaven, verdeeld over 11 onderdelen. Daarnaast krijg je tien punten gratis.

1. De Rayleigh Quotient Iteratie (36 punten)

In Trefethen & Bau wordt beargumenteerd dat de Rayleigh Quotient Iteratie (RQI) asymptotisch een cubisch convergent proces is voor reëel symmetrische matrices. In deze opgave gaan we dat heel concreet na voor de 2×2 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

We onderzoeken de convergentie van RQI naar het eigenpaar $(0, e_1)$ van A. Veronderstel hiertoe dat we een initiële benadering v^0 van de eigenvector e_1 hebben, waarbij

$$v^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \neq 0. \tag{2}$$

Let op: in tegenstelling tot in Trefethen & Bau zullen we de benaderende eigenvector v^k in iedere iteratiestap schalen zodat zijn eerste coördinaat gelijk is aan één (en er vanuit gaan dat dit kan).

Schrijf μ^0 voor de bij v^0 behorende RQI benadering van de eigenwaarde 0 van A.

(a=6) Laat zien dat $|\mu^0 - 0| \leq \|v^0 - e_1\|^2$.

(b=7) Bereken de volgende RQI eigenvectorbenadering v^1 van v.

(c=8) Gebruik v^1 om ook de volgende RQI eigenwaardebenadering μ^1 te bepalen.

Volgende RQI eigenvector- en eigenwaardebenaderingen noteren we met v^k en μ^k, $k \geq 2$.

(d=6) Bewijs dat $(\mu^k)_{k \geq 1}$ cubisch, en $(v^k)_{k \geq 1}$ kwadratisch convergent is als $|\varepsilon|$ klein genoeg is.

Beschouw nu het niet-symmetrische geval, oftewel, laat nu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(e=9) Bewijs dat $(\mu^k)_{k \geq 1}$ kwadratisch, en $(v^k)_{k \geq 1}$ lineair convergent is als $|\varepsilon|$ klein genoeg is.

Bij dit laatste onderdeel (e) volstaat het om (op correcte wijze) met ordesymbolen te werken.

2. Perturbatietheorie (36 punten)

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 19 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

De matrix $A = D + E$ is duidelijk een rang-1 perturbatie E van een diagonaalmatrix D.

(a=9) Geef de corresponderende seculiere vergelijking $f(\lambda) = 0$ en schets de grafiek van f.

(b=9) Wat zegt de Bauer-Fike stelling over de eigenwaarden van de matrix A als perturbatie van D?

De Gershgorin Cirkelstelling zegt dat iedere eigenwaarde van $A = (a_{ij})$ in tenminste één van de n gesloten schijven in $\mathbb{C}$ met middelpunt a_{jj} en straal $\sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ ligt.

Bovendien, als de vereniging B van p van deze schijven een samenhangende verzameling vormen, die disjunct is van de overige $n - p$ schijven, dan liggen er precies p eigenwaarden van A in B.

Laat nu $D_j(\varepsilon) = I - (1 - \varepsilon) e_j e_j^\top$. Dus D_j is I met de j-de diagonaalentry veranderd in ε.

(c=9) Bepaal voor iedere $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ de $\varepsilon > 0$ waarvoor de gelijkvormigheidstransformatie met $D_j(\varepsilon)$ een minimale geïsoleerde Gershgorin cirkel rond a_{jj} geeft, en geef die cirkel expliciet.

Onderdeel (c) geeft vier disjuncte intervallen die ieder een eigenwaarde van A bevatten.

(d=9) Ga van ieder van deze intervallen na in welke helft ervan de eigenwaarde zich bevindt.

3. Het QR-algoritme met shifts (18 punten)

Verondestel dat $H \in \mathbb{C}^{n \times n} = (h_{ij})$ een ongereduceerde boven Hessenbergmatrix is, wat betekent dat de sub-diagonaalentries $h_{21}, \ldots, h_{n,n-1}$ allemaal ongelijk aan nul zijn. We passen één iteratiestap toe van het QR-algoritme met shift $\mu \in \mathbb{C}$, bestaande uit de operaties

$$H - \mu I =: QR \quad \text{en} \quad \hat{H} := RQ + \mu I. \tag{5}$$

(a=9) Laat zien dat $\hat{H} = (\hat{h}_{ij})$ een boven Hessenbergmatrix is die gelijkvormig is met H.

Veronderstel nu dat μ een eigenwaarde is van H.

(b=9) Bewijs dat $\hat{h}_{n,n-1} = 0$ en $\hat{h}_{n,n} = \mu$.