Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Tweede Deeltentamen
Datum: 18 december, 2017
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 3
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Je kan 90 punten scoren voor de onderstaande 3 opgaven. Daarnaast krijg je tien punten gratis.

1. All is Fair in Bounding Eigenvalues (32 punten)

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 17 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 65 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 257 \end{bmatrix} = B^\top B, \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

In wat volgt mag je om het even welke stellingen/opgaven uit de cursus gebruiken.

(a=8) Laat zien dat A geen negatieve eigenwaarde heeft.

(b=8) Toon aan dat A minstens één eigenwaarde heeft die kleiner is dan 0.8.

(c=8) Bewijs dat A precies één eigenwaarde heeft in het interval $[15.5, 18.5]$.

Beschouw nu de matrices

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 17 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 65 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 257 \end{bmatrix} = Y^\top Y, \quad \text{en} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ga voor jezelf na of je argumenten bij (a), (b), en (c) ook gelden om hetzelfde te bewijzen voor Z.

(d=8) Heeft Z dezelfde eigenwaarden als A? Bewijs of ontkracht.

2. Wat nou, Abel-Ruffini? (34 punten)

We onderzoeken voor welke matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ het *QR-algoritme zonder shifts* (exact rekenend!) na toepassing van *eindig* veel gelijkvormigheidstransformaties *alle* eigenwaarden van A heeft gevonden.

Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ willekeurig. Pas het QR-algoritme zonder shifts toe op A.

(a=6) Laat zien dat als de QR-iteratie A op bovendriehoeksvorm brengt, dit de iteraties erna zo blijft.

Laat $v, w \in \mathbb{R}^n$ en definieer $A = vw^\top$. Veronderstel dat de eerste kolom van A ongelijk aan nul is. Pas het QR-algoritme zonder shifts toe op A, zonder A vooraf op boven-Hessenbergvorm te brengen.

(b=12) Laat zien dat 1 iteratie van het QR-algoritme zonder shifts, A op bovendriehoeksvorm brengt.

In (c) en (d) is $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een ongereduceerde nilpotente boven-Hessenbergmatrix. Dus H is boven-Hessenberg met $h_{i+1,i} \neq 0$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ en heeft geen eigenwaarde ongelijk aan nul[1].

(c=12) Laat zien dat 1 iteratie van het QR-algoritme zonder shifts toegepast op H resulteert in

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{H} & h \\ \hline 0^\top & 0 \end{array}\right]$$

voor zekere $h \in \mathbb{R}^{n-1}$, en waarbij $\hat{H}$ net als H ongereduceerd nilpotent boven-Hessenberg is.

(d=4) Concludeer dat het QR-algoritme zonder shifts *met deflatie* na $n-1$ iteraties termineert.

[1] Het eenvoudigste voorbeeld van zo'n matrix is $\left[\begin{array}{c|c} 0^\top & 0 \\ \hline I & 0 \end{array}\right]$ waarbij I de $(n-1)\times(n-1)$ identiteitsmatrix is.

3. De inverse van een Stieltjes matrix is compleet positief (24 punten)

Laat $(\ell_{ij}) = L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ benedendriehoeks zijn met positieve diagonaalentries en $\ell_{ij} \leq 0$ als $i > j$.

(a=9) Bewijs dat L^{-1} geen negatieve entries heeft.

Hint: Blok-partitioneer L als

$$L = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline \ell^\top & \lambda \end{array}\right], \quad \text{waarbij} \quad \hat{L} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \quad \ell \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

vind de overeenkomstige partitionering van L^{-1} in termen van $\hat{L}, \ell$ en λ, en gebruik inductie. $\square$

Geheugensteuntje: een symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heet *positief definiet* als $x^\top Ax > 0$ voor alle $x \neq 0$. Iedere symmetrische positief definiete matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heeft een Choleskyfactorisatie $A = CC^\top$, waarbij $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een benedendriehoeksmatrix is met positieve diagonaalentries.

Een symmetrische positief definiete $(s_{ij}) = S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is een *Stieltjes matrix* als $s_{ij} \leq 0$ voor alle $i \neq j$.

(b=3) Laat zien dat alle diagonaalentries van een Stieltjes matrix positief zijn.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heet *compleet positief* als $A = B^\top B$ voor zekere matrix B met reële niet-negatieve entries.

(c=12) Toon aan dat de inverse van iedere Stieltjes matrix compleet positief is.