Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Tweede Deeltentamen
Datum: 18 december, 2017
Tijd: 13.00-15.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 4
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Je kan 90 punten scoren voor de onderstaande 4 opgaven. Daarnaast krijg je tien punten gratis.

1. Cholesky decompositie voor positief definiete matrices (18 punten)

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 17 \end{bmatrix}.$$

(a=9) Bepaal de Sturmrij van A en bewijs hiermee dat A positief definiet is.

(c=9) Bereken de Cholesky-decompositie van A.

2. Convergentie van de Machtsmethode (27 punten)

Laat A een reële symmetrische 2×2 matrix zijn met $Av = 3v$ en $Aw = w$, en $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$.

We passen de Machtsmethode toe op A met startvector $v_0 \in \mathbb{R}^2$ met $\|v_0\|_2 = 1$. Deze methode produceert benaderingen $v_1, v_2, \ldots$ voor v en benaderingen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ voor de eigenwaarde 3.

(a=9) Geef dit algoritme. Het stopcriterium mag ongespecificeerd blijven.

Schrijf θ_k voor de hoek tussen v_k en v. Dus θ_0 is de starthoek. Neem aan dat $\cos(\theta_0) \neq 0$. Schrijf λ_k voor de benadering van de eigenwaarde 3 in de k-de iteratie (afkomstig van v_k).

Hint: Reduceer (b) en (c) zonder verlies van algemeenheid (motiveer!) tot een speciaal voorbeeld en schrijf dit geduldig en gediciplineerd uit.

(b=9) Bewijs dat $|\sin(\theta_k)| \leq |\tan(\theta_0)| 3^{-k}$.

(c=9) Bewijs dat $|3 - \lambda_k| \leq 2\tan^2(\theta_0) 3^{-2k}$.

3. De QR-iteratie en een klein beetje Jacobi (27 punten)

Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a=7) Pas op A één iteratie toe van het QR-algoritme met de Rayleigh quotient shift.

(b=7) Pas op A één iteratie toe van het QR-algoritme zonder shift.

(c=6) Motiveer welke (eventueel andere) variant van QR het snelst convergeert en geef aan waarom.

(c=7) Pas op A één Jacobi-sweep toe.

4. Divide and Conquer (18 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

We passen de Divide & Conquer methode toe om de eigenwaarden van A te bepalen.

(a=9) Splits het probleem via deze methodologie op in twee 2×2 eigenproblemen en los deze op.

Er resteert vervolgens een nog op te lossen diagonaal plus rang-1 eigenprobleem $D + \beta z z^\top$.

(b=9) Geef expliciet de seculiere vergelijking $f(\lambda) = 0$ voor dit probleem en schets de grafiek van f.