Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen
Datum: 24 februari 2014
Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 5
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

1. Gram-Schmidt (GS) versus Modified Gram-Schmidt (MGS) (15 punten)

We veronderstellen dat de komende algoritmes worden geïmplementeerd op een computer met *IEEE double precision arithmetic*, met machineprecisie $\varepsilon_m = 2^{-53}$, die voldoet aan de axioma's

$(A1)$ $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : fl(x) = x(1+\varepsilon)$.

$(A2)$ $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : x \circledast y = (x * y)(1+\varepsilon)$.

(a=6) Hoeveel machinegetallen liggen er in het interval $[2,3]$?

Laat nu $\nu \in \mathbb{F}$ zodanig dat $fl(1+\nu) = 1$. Gegeven zijn de vectoren

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(b=9) Laat zien hoe $\{a_1, a_2, a_3\}$ op de gegeven machine worden georthonormaliseerd; eerst middels het *Gram-Schmidt algoritme*, en dan middels het *Modified Gram-Schmidt* algoritme.

2. Kleinste Kwadraten Problemen en de Pseudo-inverse (15 punten)

Laat voor $1 \leq k \leq n$ een reële $n \times k$ matrix A gegeven zijn, en $b \in \mathbb{R}^b$. Beschouw het kleinste kwadraten probleem dat vraagt naar $x \in \mathbb{R}^k$ waarvoor $\|Ax - b\|_2$ minimaal is.

De oplossing x kan geschreven worden als $x = A^+ b$, waarbij A^+ de pseudo-inverse van A is.

(a=6) Druk A^+ uit in termen van A.

Veronderstel nu dat de $k \times k$ matrix A_1 bestaande uit de eerste k rijen van A inverteerbaar is.

(b=9) Bewijs dat $\|A^+\|_2 \leq \|A_1^{-1}\|_2$.

3. Conditie en Stabiliteit (15 punten)

Gegeven het niet-singuliere 2×2 bovendriehoeks lineare stelsel $Rx = b$, uitgeschreven als

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

(a=6) Bepaal het relatieve conditiegetal van de entry x_2 t.o.v. perturbaties in b_2.

Het stelsel wordt opgelost middels *back substitution* op een computer die voldoet aan de bij Opgave 1 gegeven axioma's (A1) en (A2) met machineprecisie ε_m.

(b=9) Laat zien dat deze back substitution *backward stable* is, in de zin dat

$$(R + \Delta R)\tilde{x} = b, \quad \text{met } \frac{\|\Delta R\|}{\|R\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_m),$$

waarbij $\tilde{x}$ de *berekende oplossing* van $Rx = b$ is.

4. Sturm sequence, Cholesky decompositie, en Jacobi-rotatie (24 punten)

Gegeven de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a=6) Bepaal de *Sturm-sequence* van A en bewijs hiermee dat A positief definiet is.

(b=6) Bereken de Cholesky-decompositie van A.

(c=6) Pas één *sweep* van het *Jacobi-eigenwaarde-algoritme* toe op A.

(d=6) Pas ook één iteratie van het *QR-eigenwaarde-algorimte zonder shifts* toe op A.

5. Arnoldi en GMRES (18 punten)

Gegeven het lineaire stelsel $Ax = b$ waarbij

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De *Arnoldi iteratie* produceert in stap k een orthonormale basis $\beta_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$ voor de k-de *Krylov deelruimte* $\mathcal{K}_k(A, b) = \mathrm{span}\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}$. Schrijf V_k voor de matrix met kolommen $v_1, \ldots, v_k$.

(a=6) Bepaal deze orthonormale basis β_k voor $\mathcal{K}_k(A, b)$ ingeval $k = 3$: geef zijn matrixvorm V_3.

De *Generalized Minimal Residual Method* GMRES benadert de oplossing x van $Ax = b$ met het element $x_k \in \mathcal{K}_k(A, b)$ waarvoor het residu $r_k = b - Ax_k$ minimale standaardnorm heeft.

(b=6) Bereken de GMRES benaderingen x_1, x_2, x_3.

(c=6) Bereken ook de *Arnoldi eigenwaarden benaderingen* voor $k \in \{1, 2\}$.