UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen
Datum: 24 februari 2015
Tijd: 18.00-21.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

1. Gram-Schmidt (GS) versus Modified Gram-Schmidt (MGS) (15 punten)

We veronderstellen dat de komende algoritmes worden geïmplementeerd op een computer met *IEEE double precision arithmetic*, met machineprecisie $\varepsilon_m = 2^{-53}$, die voldoet aan de axioma's

$(A1)$ $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : fl(x) = x(1+\varepsilon)$.

$(A2)$ $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \varepsilon$ met $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m : x \circledast y = (x * y)(1+\varepsilon)$.

(a=6) Hoeveel machinegetallen liggen er in het interval $[2,3]$?

Laat nu $\nu \in \mathbb{F}$ zodanig dat $fl(1+\nu) = 1$. Gegeven zijn de vectoren

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(b=9) Laat zien hoe $\{a_1, a_2, a_3\}$ op de gegeven machine worden georthonormaliseerd; eerst middels het *Gram-Schmidt algoritme*, en dan middels het *Modified Gram-Schmidt* algoritme. Bereken in beide gevallen expliciet de "orthonormale" basis die resulteert.

2. Kleinste Kwadraten Problemen en de Pseudo-inverse (15 punten)

Laat voor $1 \leq k \leq n$ een reële $n \times k$ matrix A gegeven zijn, en $b \in \mathbb{R}^b$. Beschouw het kleinste kwadraten probleem dat vraagt naar $x \in \mathbb{R}^k$ waarvoor $\|Ax - b\|_2$ minimaal is.

Schrijf $\mathcal{B}_r(m) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|m - y\|_2 = r\}$ voor de sfeer met middelpunt $m \in \mathbb{R}^n$ en straal r.

(a=7) Bewijs dat $Ax \in \mathcal{B}_r(m)$ met $m = b/2$ en $r = \|m\|_2$.

Veronderstel nu dat de $k \times k$ matrix A_1 bestaande uit de eerste k rijen van A inverteerbaar is.

(b=8) Bewijs dat voor de pseudo-inverse A^+ van A geldt dat $\|A^+\|_2 \leq \|A_1^{-1}\|_2$.

3. Conditie en Stabiliteit (15 punten)

Gegeven het niet-singuliere 3×3 bovendriehoeks lineare stelsel $Rx = b$, uitgeschreven als

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(a=6) Bepaal het absolute en het relatieve conditiegetal van de entry x_3 t.o.v. perturbaties in b_3.

Het stelsel wordt opgelost middels *back substitution* op een computer die voldoet aan de bij Opgave 1 gegeven axioma's (A1) en (A2) met machineprecisie ε_m.

(b=9) Laat zien dat deze back substitution *backward stable* is, in de zin dat

$$(R + \Delta R)\tilde{x} = b, \quad \text{met } \frac{\|\Delta R\|}{\|R\|} = \mathcal{O}(\varepsilon_m),$$

waarbij $\tilde{x}$ de *berekende oplossing* van $Rx = b$ is, en $\|\cdot\|$ een norm naar keuze.

4. Sturm sequence en Cholesky decompositie (15 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a=7) Bepaal de *Sturm-sequence* van A en bewijs hiermee dat A positief definiet is.

(b=8) Bereken de Cholesky-decompositie van A.

5. De Machtsmethode (15 punten)

Laat A een reële symmetrische 2×2 matrix zijn met $Av = 2v$ en $Aw = w$, en $\|v\|_2 = \|w\|_2 = 1$.

We passen de *Machtsmethode* toe op A met startvector $v_0 \in \mathbb{R}^2$ met $\|v_0\|_2 = 1$.

(a=6) Geef het algoritme dat op deze wijze verdere benaderingen $v_1, v_2, \dots$ voor v produceert.

Schrijf θ_k voor de hoek tussen v_k en v. In het bijzonder is θ_0 dus de *starthoek*.

(b=9) Bewijs dat $|\sin(\theta_k)| \leq |\tan(\theta_0)| 2^{-k}$.

6. Divide and Conquer (15 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

We passen de *Divide* $\&$ *Conquer* methode toe om de eigenwaarden van A te bepalen.

(a=6) Splits het probleem via deze methodologie op in twee 2×2 eigenproblemen en los deze op.

Er resteert vervolgens een nog op te lossen *diagonaal plus rang*-1 eigenprobleem $D + \beta z z^\top$.

(b=9) Geef *expliciet* de *seculiere vergelijking* $f(\lambda) = 0$ voor dit probleem en schets de grafiek van f.