UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen
Datum: 02 mei 2016
Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

1. Floating point arithmetic (15 punten)

Beschouw een (geïdealiseerde) rekenmachine $\mathcal{M}$ met machinegetallen

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \pm \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \mathcal{F} \quad \text{met} \quad \mathcal{F} = \{1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2\}.$$

Veronderstel dat $\mathcal{M}$ voldoet aan het *Fundamental Axiom of Floating Point Arithmetic*, in de zin dat als $x * y \notin \mathbb{F}$, de *afgeronde* waarde $fl(x * y)$ van $x * y$ wordt toegekend aan de machine-operatie $x \circledast y$.

Voeg hieraan toe de conventie dat als $x * y \notin \mathbb{F}$ precies midden tussen twee opeenvolgende machinegetallen ligt, we voor $x \circledast y$ degene kiezen met de *kleinste* absolute waarde.

(a=9) Gebruik $\mathcal{M}$ om het Gram-Schmidt proces toe te passen op de twee vectoren $a_1, a_2 \in \mathbb{F}^2$,

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

en noem de resulterende vectoren $q_1, q_2 \in \mathbb{F}^2$.

(b=6) Pas op $\mathcal{M}$ het Gram-Schmidt proces nogmaals toe, nu op q_1 en q_2.

2. Conditionering en stabiliteit (15 punten)

Beschouw de bovendriehoeksmatrix R met eigenwaarden a en b,

$$R = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{met eigenvectoren} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ b-a \end{bmatrix} \quad .$$

Merk op dat deze twee eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn als en alleen als $a \neq b$.

We onderzoeken het probleem dat de tweede eigenvector van R uitrekent als

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ b-a \end{bmatrix},$$

en voorzien hiertoe het domein en het codomein van f van de maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$.

(a=5) Bereken het *relatieve conditiegetal* κ van f t.a.v. perturbaties in de datavector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

(b=5) Kan een relatief kleine perturbatie op de data de eigenvector relatief veel veranderen?

Als algoritme $\tilde{f}$ om f te berekenen op een (geïdealiseerde) rekenmachine $\mathcal{M}$ die voldoet aan de *Fundamental Axiom of Floating Point Arithmetic* stellen we voor:

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{F}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ fl(b) \ominus fl(a) \end{bmatrix}.$$

(c=5) Is $\tilde{f}$ een *backward stable* algoritme?

3. Kleinstekwadratenprobleem met Householderspiegelingen (15 punten)

Beschouw het kleinstekwadratenprobleem dat $x \in \mathbb{R}^3$ zoekt zodanig dat

$$Ax \overset{L.S.}{=} b \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a=9) Breng A op bovendriehoeksvorm middels de stabielst mogelijke Householderspiegelingen.

(b=6) Bereken de oplossing x, het bij x horende residu r, en het 2-norm conditiegetal van A.

4. Cholesky decompositie en eigenwaarden tellen (15 punten)

Laat

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a=7) Bepaal de Cholesky decompositie van A.

(b=8) Bepaal het aantal eigenwaarden van A dat in het gesloten interval $[3, 4]$ ligt.

5. Perturbatietheorie (15 punten)

Laat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en laat $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$.

(a=8) Bewijs de equivalentie van (1) en (2):

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ is een eigenwaarde van $A + E$ voor zekere $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met $\|E\|_2 \leq \varepsilon$;

(2) $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 \geq \varepsilon^{-1}$.

Veronderstel nu dat $A = V\Lambda V^{-1}$ met Λ een diagonaalmatrix, en laat $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ willekeurig.

(b=7) Bewijs dat voor iedere eigenwaarde λ van $A + E$ er een eigenwaarde μ van A bestaat zo, dat

$$|\lambda - \mu| \leq \kappa_2(V)\|E\|_2,$$

waarbij $\kappa_2(V)$ het 2-norm conditiegetal is van V.

6. Het QR-algoritme (15 punten)

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Het QR-algoritme toegepast op $A_0 = A$ produceert een rij $A_1, A_2, \ldots$ van matrices die gelijkvormig zijn met A en die onder bepaalde condities convergeert naar een diagonaalmatrix.

Normaal gesproken wordt, alvorens het QR-algoritme wordt toegepast, de matrix getridiagonaliseerd op grond van efficiëntie-overwegingen. Omdat A slechts 4×4 is, slaan we deze stap hier over.

(a=5) Laat zien hoe het QR-algoritme (zonder shifts) de matrices A_1, A_2 en A_3 berekent.

(b=5) De $(1, 1)$-entry $a_{11}^{(3)}$ van A_3 benadert de grootste eigenwaarde van A. Bepaal $a_{11}^{(3)}$.

Het QR-algoritme met Rayleigh-quotient shifts toegepast op $A_0 = A$ produceert ook een rij $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots$ matrices gelijkvormig met A die onder bepaalde condities convergeert naar een diagonaalmatrix.

(c=5) De $(4, 4)$-entry $a_{44}^{(1)}$ van A_1 benadert de kleinste eigenwaarde van A. Bepaal $a_{44}^{(1)}$.