

# Tentamen

## Numerieke Lineaire Algebra Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen

Datum: 21 april 2017

Tijd: 16.00-19.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 5

Maximum aantal te behalen punten: 100

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

### VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

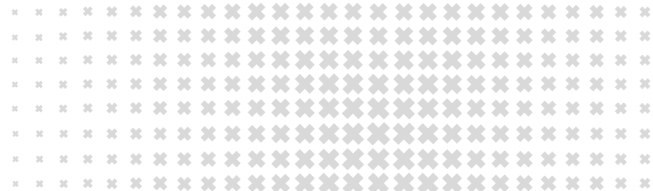
---

### HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**



**Opgave 1: Floating Point Arithmetic en Backward Stability (24 punten)**

**(a=4)** Welke getallen vormen het geïdealiseerde binaire getallensysteem  $\mathbb{G}$  met twee significante bits?

Beschouw een (evenzo geïdealiseerde) computer  $D$  uitgerust met het getallensysteem  $\mathbb{G}$ .

**(b=3)** Wat is in de waarde van de relatieve machineprecisie  $\varepsilon_m$  van  $D$ ?

Beschouw tevens het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F} = \{-2^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Schrijf  $e = e_1 + \dots + e_n$  voor de *all-ones* vector in  $\mathbb{R}^n$ .

Herinner je dat een niet-negatieve vector  $v \in \mathbb{R}^n$  *stochastisch* heet als  $e^\top v = 1$ , en dat een niet-negatieve matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  *dubbelstochastisch* heet als elke rij en kolom een stochastische vector is.

**(c=3)** Geef de verzameling van alle stochastische vectoren in  $\mathbb{F}^3$ .

**(d=6)** Hoeveel dubbelstochastische matrices bevat  $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ ? En  $\mathbb{F}^{3 \times 3}$ ?

Er geldt dat iedere *positieve* matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  geschreven kan worden als

$$A = D_1 M D_2 \tag{1}$$

waarbij  $D_1$  en  $D_2$  inverteerbare diagonaalmatrices zijn, en  $M$  dubbelstochastisch is. Als  $n = 2$  is

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad+bc} & \frac{bc}{ad+bc} \\ \frac{bc}{ad+bc} & \frac{ad}{ad+bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ad+bc}{bd} & 0 \\ 0 & \frac{ad+bc}{ac} \end{bmatrix} \tag{2}$$

zelfs een expliciete formule voor de decompositie zoals gegeven in (1). Beschouw nu het probleem

$$f : \mathbb{R}_{>0}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \mapsto (D_1, M, D_2)$$

om de drie matrices uit de decompositie in (2) te berekenen voor een gegeven positieve matrix  $A$ .

Beschouw ook een rij computers  $C_1, C_2, \dots$  waarvan elke computer voldoet aan het *fundamental axiom of finite precision arithmetic*, en met respectievelijke machineprecisies  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  convergerend naar nul.

Schrijf  $\hat{f}$  voor een *willekeurig* algoritme dat  $f$  op  $(C_j)_{j \geq 1}$  implementeert;  $\hat{f}$  zal wortels moeten berekenen van de entries van  $A$ . U mag er van uit gaan dat dit *backward stable* kan worden geïmplementeerd.

**(e=8)** Beargumenteer dat  $\hat{f}$  desondanks niet *backward stable* is.

**Opgave 2. De conditie van het spoor (10 punten)**

Het probleem dat het spoor  $\text{Tr}(A)$  van een matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  berekent kan formeel geschreven worden als

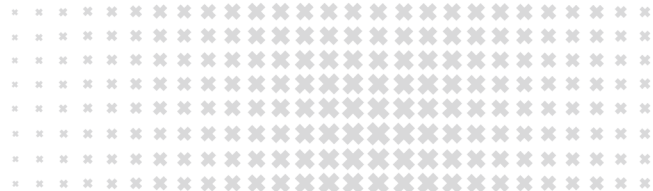
$$\text{Tr} : (\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) : A \mapsto \text{Tr}(A).$$

We kiezen hier voor  $\|\cdot\|$  de Frobenius-norm, en voor  $|\cdot|$  de absolute waarde.

**(a=4)** Wat is het *absolute conditiegetal*  $\hat{\kappa}$  van dit probleem als functie van de dimensie  $n$ ?

Voor elke  $A \in \text{dom}(\text{Tr})$ , laat  $\kappa(A)$  het *relatieve conditiegetal* van dit probleem zijn in  $A$ .

**(b=6)** Is  $\kappa$  uniform begrensd op het domein van  $\text{Tr}$ ? Zo ja, bewijs. Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

**Opgave 3: Over QR-decomposities en QR-iteraties (24 punten)**

Gegeven is de eenvoudige  $2 \times 1$  matrix

$$A = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

**(a=6)** Bereken expliciet de stabiele-keuze Householder QR-decompositie van  $A$ .

Laat nu  $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$  met  $k \leq n$  en veronderstel dat  $B$  volledige rang heeft.

**(b=4)** Uiteraard is  $B^T B$  symmetrisch. Bewijs dat  $B^T B$  ook positief definit is.

**(c=6)** Hoe kan een QR-decompositie van  $B$  worden berekend via de Cholesky-factorisatie van  $B^T B$ ?

Laat  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  een *unreduced upper Hessenberg* matrix zijn. Beschouw één stap van de QR-iteratie met shift  $\mu$  toegepast op  $H$ :

$$H - \mu I =: QR, \quad \hat{H} := RQ + \mu I.$$

**(d=8)** Laat zien dat  $\hat{H}$  unreduced upper Hessenberg is als en alleen als  $\mu$  geen eigenwaarde is van  $H$ .

**Opgave 4. Divide and Conquer en gerelateerde zaken (20 punten)**

Beschouw het eigenwaardenprobleem voor de symmetrische tridiagonaalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**(a=4)** Bewijs dat  $A - (2 - \varepsilon)I$  positief definit is voor alle  $\varepsilon > 0$ .

Het *Divide and Conquer* algoritme schrijft  $A$  als een rang-1 perturbatie van een blok-diagonaalmatrix waarvan de diagonaalblokken afmetingen  $2 \times 2$  hebben.

**(b=4)** Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van deze blok-diagonaalmatrix.

Met de gevonden eigenvectoren kan het eigenwaardenprobleem voor  $A$  worden getransformeerd tot een rang-1 perturbatie van een diagonaalmatrix  $D$ .

**(c=8)** Bepaal expliciet deze rang-1 perturbatie en  $D$  en geef de bijbehorende *seculiere vergelijking*.

Laat nu, geheel los van het voorgaande,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + ww^T, \quad \text{waarbij } w = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**(d=4)** Bereken twee eigenwaarden van  $B$ .

**Opgave 5. De interlacing property (12 punten)**

Herinner je het belang van de *interlacing property* bij de bisectiemethode voor eigenwaarden.

**(a=4)** Formuleer de interlacing property van de eigenwaarden van een symmetrische matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Hint:** Wees nauwkeurig: de gegeven matrix  $A$  kan een diagonaalmatrix zijn!

**(b=8)** Bewijs deze interlacing property voor  $n = 2$  en  $n = 3$ .

