Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen
Datum: 21 april 2017
Tijd: 16.00-19.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 5
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Opgave 1: Floating Point Arithmetic en Backward Stability (24 punten)

(a=4) Welke getallen vormen het geïdealiseerde binaire getallensysteem $\mathbb{G}$ met twee significante bits?

Beschouw een (evenzo geïdealiseerde) computer D uitgerust met het getallensysteem $\mathbb{G}$.

(b=3) Wat is in de waarde van de relatieve machineprecisie ε_m van D?

Beschouw tevens het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F} = \{-2^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Schrijf $e = e_1 + \ldots + e_n$ voor de *all-ones* vector in $\mathbb{R}^n$.

Herinner je dat een niet-negatieve vector $v \in \mathbb{R}^n$ *stochastisch* heet als $e^\top v = 1$, en dat een niet-negatieve matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dubbelstochastisch* heet als elke rij en kolom een stochastische vector is.

(c=3) Geef de verzameling van alle stochastische vectoren in $\mathbb{F}^3$.

(d=6) Hoeveel dubbelstochastische matrices bevat $\mathbb{F}^{2\times 2}$? En $\mathbb{F}^{3\times 3}$?

Er geldt dat iedere *positieve* matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geschreven kan worden als

$$A = D_1 M D_2 \tag{1}$$

waarbij D_1 en D_2 inverteerbare diagonaalmatrices zijn, en M dubbelstochastisch is. Als $n = 2$ is

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad+bc} & \frac{bc}{ad+bc} \\ \frac{bc}{ad+bc} & \frac{ad}{ad+bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ad+bc}{bd} & 0 \\ 0 & \frac{ad+bc}{ac} \end{bmatrix} \tag{2}$$

zelfs een expliciete formule voor de decompositie zoals gegeven in (1). Beschouw nu het probleem

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2}_{>0} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad A \mapsto (D_1, M, D_2)$$

om de drie matrices uit de decompositie in (2) te berekenen voor een gegeven positieve matrix A.

Beschouw ook een rij computers $C_1, C_2, \ldots$ waarvan elke computer voldoet aan het *fundamental axiom of finite precision arithmetic*, en met respectievelijke machineprecisies $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ convergerend naar nul.

Schrijf $\hat{f}$ voor een *willekeurig* algoritme dat f op $(C_j)_{j\geq 1}$ implementeert; $\hat{f}$ zal wortels moeten berekenen van de entries van A. U mag er van uit gaan dat dit *backward stable* kan worden geïmplementeerd.

(e=8) Beargumenteer dat $\hat{f}$ desondanks niet *backward stable* is.

Opgave 2. De conditie van het spoor (10 punten)

Het probleem dat het spoor $\mathrm{Tr}(A)$ van een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berekent kan fomeel geschreven worden als

$$\mathrm{Tr} : (\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) : \quad A \mapsto \mathrm{Tr}(A).$$

We kiezen hier voor $\|\cdot\|$ de Frobenius-norm, en voor $|\cdot|$ de absolute waarde.

(a=4) Wat is het *absolute conditiegetal* $\hat{\kappa}$ van dit probleem als functie van de dimensie n?

Voor elke $A \in \mathrm{dom}(\mathrm{Tr})$, laat $\kappa(A)$ het *relatieve conditiegetal* van dit probleem zijn in A.

(b=6) Is κ uniform begrensd op het domein van Tr? Zo ja, bewijs. Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 3: Over QR-decomposities en QR-iteraties (24 punten)

Gegeven is de eenvoudige 2×1 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(a=6) Bereken expliciet de stabiele-keuze Householder QR-decompositie van A.

Laat nu $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ met $k \leq n$ en veronderstel dat B volledige rang heeft.

(b=4) Uiteraard is $B^\top B$ symmetrisch. Bewijs dat $B^\top B$ ook positief definiet is.

(c=6) Hoe kan een QR-decompositie van B worden berekend via de Cholesky-factorisatie van $B^\top B$?

Laat $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ een *unreduced upper Hessenberg* matrix zijn. Beschouw één stap van de QR-iteratie met shift μ toegepast op H:

$$H - \mu I =: QR, \qquad \hat{H} := RQ + \mu I.$$

(d=8) Laat zien dat $\hat{H}$ unreduced upper Hessenberg is als en alleen als μ geen eigenwaarde is van H.

Opgave 4. Divide and Conquer en gerelateerde zaken (20 punten)

Beschouw het eigenwaardenprobleem voor de symmetrische tridiagonaalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a=4) Bewijs dat $A - (2 - \varepsilon)I$ positief definiet is voor alle $\varepsilon > 0$.

Het *Divide and Conquer* algoritme schrijft A als een rang-1 perturbatie van een blok-diagonaalmatrix waarvan de diagonaalblokken afmetingen 2×2 hebben.

(b=4) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van deze blok-diagonaalmatrix.

Met de gevonden eigenvectoren kan het eigenwaardenprobleem voor A worden getransformeerd tot een rang-1 perturbatie van een diagonaalmatrix D.

(c=8) Bepaal expliciet deze rang-1 perturbatie en D en geef de bijbehorende *seculiere vergelijking*.

Laat nu, geheel los van het voorgaande,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + ww^\top, \quad \text{waarbij } w = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(d=4) Bereken twee eigenwaarden van B.

Opgave 5. De interlacing property (12 punten)

Herinner je het belang van de *interlacing property* bij de bisectiemethode voor eigenwaarden.

(a=4) Formuleer de interlacing property van de eigenwaarden van een symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Hint: Wees nauwkeurig: de gegeven matrix A kan een diagonaalmatrix xijn!

(b=8) Bewijs deze interlacing property voor $n = 2$ en $n = 3$.