Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Numerieke Lineaire Algebra

Bachelor wiskunde jaar 3

Hertentamen
Datum: 23 april 2018
Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 3 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 100
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

1. Rekenen in een geïdealiseerd getallensysteem (15 punten)

Laat $q \in \mathbb{N}_0$ gegeven zijn. Beschouw het geïdealiseerde getallensysteem

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \pm 2^j \mathcal{F} \quad \text{met} \quad \mathcal{F} = \{1, 1 + 2^{-q}, 1 + 2 \cdot 2^{-q}, 1 + 3 \cdot 2^{-q}, \dots, 2 - 2^{-q}\}.$$

Laat $fl : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ de afronding van $x \in \mathbb{R}$ naar het dichtstbijzijnde getal in $\mathbb{F}$ zijn; indien er daar twee van zijn, laat $fl(x)$ de grootste zijn in absolute waarde. Schrijf $\varepsilon = 2^{-q-1}$.

(a=7) Bewijs dat er voor alle $x \in \mathbb{R}$ een $\eta \in \mathbb{R}$ bestaat met $|\eta| \leq \varepsilon$ zo, dat $fl(x) = x(1 + \eta)$.

Definieer $x \ominus y = fl(x - y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{F}$, en benader voor elk gegeven paar $x, y \in \mathbb{R}$ het verschil $x - y$ met het algoritme $fl(x) \ominus fl(y)$.

(b=8) Is dit algoritme backward stable? Zo ja bewijs, zo nee, laat zien waarom niet.

2. QR-decompositie via de Cholesky decompositie (15 punten)

Laat $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ volledige rang k hebben. Laat $A^\top A = LL^\top$ een Cholesky factorisatie van $A^\top A$ zijn en schrijf Q voor de oplossing van het onderdriehoeksstelsel $LQ^\top = A^\top$.

(a=5) Laat zien dat de Q de orthogonale factor is van een QR-decompositie van A.

Zowel de Cholesky-factorisatie $B = SS^\top$ van een symmetrisch positief definiete matrix B, als oplossingen van driehoeksstelsels $Rx = b$ lineaire vergelijkingen, kunnen backward stable worden berekend.

(b=4) Geef van deze uitspraken over backward stability zo precies mogelijk weer wat ze betekenen.

(c=6) Motiveer waarom de hierboven beschreven manier om een QR-factorisatie van een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ te bepalen desondanks toch niet backward stable is.

3. Kleinste kwadraten problemen (15 punten)

Gegeven een kleinste kwadratenprobleem $Ax \overset{L.S.}{=} b$ met $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ van volledige rang k, en $b \in \mathbb{R}^n$. Veronderstel dat $A = QR$ een (skinny/thin) QR-decompositie is van A, en dat $A^\top A = LL^\top$ een Cholesky decompositie is.

(a=6) Geef voor elk van deze decomposities een methode om hiermee $Ax \overset{L.S.}{=} b$ op te lossen.

Stel dat extra data beschikbaar komen en dat deze als extra vergelijking aan het oorspronkelijke stelsel worden toegevoegd,

$$B\hat{x} = \begin{bmatrix} A \\ \hline a^\top \end{bmatrix} \hat{x} \overset{L.S.}{=} \begin{bmatrix} b \\ \hline \beta \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad a \in \mathbb{R}^k, \beta \in \mathbb{R}$$

Matrix B heeft een QR-factorisatie $B = \hat{Q}\hat{R}$ en $B^\top B$ heeft een Cholesky decompositie $B^\top B = \hat{L}\hat{L}^\top$.

Deze hoeven echter niet vanaf scratch helemaal opnieuw uitgerekend te worden.

(b=9) Gegeven R en L, laat zien hoe $\hat{R}$ and $\hat{L}$ middels k Givens rotaties bepaald kunnen worden.

4. Eigenwaarden en conditiegetal (15 punten)

Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a=5) Bewijs dat alle eigenwaarden van A reëel zijn en groter dan één.

(b=5) Bereken een eigenwaarde van A.

Schrijf $\kappa_2(\cdot)$ voor het $\|\cdot\|_2$-norm conditiegetal.

(c=5) Bewijs dat $\kappa_2(A) \leq 9$.

5. De QR-iteratie (15 punten)

Laat $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ een singuliere ongereduceerde upper Hessenberg matrix zijn.

(a=6) Laat $H = QR$ een QR-decompositie zijn. Bewijs dat de vierde rij van R uit vier nullen bestaat.

Beschouw één stap van de QR-iteratie met shift μ, oftewel $H - \mu I =: QR$ gevolgd door $\hat{H} := RQ + \mu I$.

(b=9) Laat zien dat $\hat{H}$ unreduced upper Hessenberg is als en alleen als μ geen eigenwaarde is van H.

6. Wanneer vindt Jacobi-iteratie alle eigenwaarden? (15 punten)

Laat $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ en laat $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de identiteitsmatrix zijn. Laat $\beta \in \mathbb{R}$, en beschouw de matrix

$$A = \beta I + uu^\top.$$

We passen op A één sweep van de Jacobi-iteratie toe, bestaande uit $\frac{1}{2}n(n-1)$ Jacobi-rotaties (van links naar rechts, van boven naar onder) die elk twee symmetrisch aan elkaar gelegen off-diagonal entries naar nul transformeren.

(a=6) Bewijs dat de resulterende matrix gelijk is aan $\beta I + vv^\top$ voor zekere $v \in \mathbb{R}^n$.

(b=9) Bewijs dat de resulterende matrix zelfs een diagonaalmatrix is.

Bij (b) mag je voor de overzichtelijkheid van je bewijs aannemen dat A een 4×4 matrix is, als je maar aannemelijk maakt dat voor andere afmetingen je argument ook werkt.